TRẦN ĐÌNH THÌ

Ôn tập và rèn kĩ năng giải Toán cơ bản, nâng cao theo chương trình và SGK mới

Phân dạng và phương pháp giải

Hình học 11

(Bài tập tự luận và trắc nghiệm)

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐÌNH THÌ

Ôn tập
và rèn luyện
kĩ năng giải Toán
theo chương trình
và SGK
mới

Phân dạng và phương pháp giải
Hình học 11

(Bài tập tự luận và trắc nghiệm)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT: (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899

***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung
MINH HẢI
Sửa bản in
HOÀNG VĨNH
Trình bày bìa
SƠN KỲ

PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HÌNH HỌC 11
Mã số: 1L - 158ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti cổ phần Văn hoá Tân Bình.
Số xuất bản: 361 - 2007/CXB/08 - 59/ĐHQG HN, ngày 18/05/2007.
Quyết định xuất bản số: 352/LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quí III năm 2007

Lời nói đầu

Để nâng cao chất lượng dạy học bộ môn Toán theo chương trình cải cách giáo dục, chương trình phân ban, đặc biệt giúp học sinh giải bài tập toán bộ môn Hình học lớp 11 chương trình chuyên ban khoa học tự nhiên, các chuyên đề nâng cao,

Chúng tôi biên soạn cuốn sách *Phân dạng và phương pháp giải Hình học 11*. Cuốn sách được cấu trúc tuần tự theo các phần sau:

1. Kiến thức cơ bản của chương.

2. Bài tập mẫu: Bài tập tự luận, bài tập trắc nghiệm.

3. Bài tập tự rèn luyện: Bài tập tự luận, bài tập trắc nghiệm.

4. Các đề thi tự ôn tập (bài tập tự luận, bài tập trắc nghiệm).

Cuốn sách này chú trọng đến các bài toán trắc nghiệm đáp ứng được mục tiêu, yêu cầu của Bộ Giáo dục và Đào tạo; đáp ứng được việc kiểm tra đánh giá học sinh một cách chính xác và phân loại được kết quả học tập của học sinh, giúp cho học sinh tự học và làm tài liệu tham khảo cho giáo viên.

Chắc rằng cuốn sách vẫn còn nhiều thiếu sót, tác giả mong nhận được sự góp ý của độc giả.

Mọi góp ý xin gởi về:

- Trung tâm sách giáo dục Alpha - 225C Nguyễn Tri Phương, P,9, Q..5, Tp. HCM. ĐT: (08) 8107718, 8547464, 0903701650.

- Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

Tác giả

Chương 1. PHÉP DỜI HÌNH, PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

PHÉP TỊNH TIẾN

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa:

Cho $\vec{v}$, gọi $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

II. Biểu thức toạ độ, phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy: M(x, y), $\vec{v} = (a, b)$.

Gọi M'(x',y')=$T_{\vec{v}}(M)$ Khi đó $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

III. Tính chất của phép tịnh tiến

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ: A, B; $A' = T_{\vec{v}}(A)$ $B' = T_{\vec{v}}(B) \Leftrightarrow AB = A'B'$.
2) Phép tịnh tiến biến A, B, C thẳng hàng thành A',B',C' thẳng hàng.
3) Phép tịnh tiến biến một đường thẳng d thành một đường thẳng d' thì d// d' hoặc $d' \equiv d$.
4) Phép tịnh tiến biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' và $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.
5) Phép tịnh tiến biến một đường tròn (O, R) thành một đường tròn (O', R) mà $O' = T_{\vec{v}}(O), R' = R$.
6) Phép tịnh tiến biến góc $\widehat{AOB}$ thành góc $\widehat{A'O'B'}$ và $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.

B. Các dạng toán

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định ảnh qua phép tịnh tiến

Phương pháp giải:

Cách 1

- *Xác định vectơ tịnh tiến*
- *Xét một điểm đặc biệt của hình (H). Xác định các điểm đặc biệt đó thuộc hình ảnh (H').*

Cách 2

- *Xét biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến:* $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$
- *Xét biểu thức toạ độ của (H) suy ra biểu thức toạ độ hình (H').*

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ cho $\vec{v}(2;-3)$, đường thẳng (d) có phương trình: $x+y-1=0$. Hãy tìm đường thẳng d' ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1: Một đường thẳng xác định được khi đường thẳng đi qua hai điểm xác định.

$M_1(1,0) \in d \to M_1' = T_{\vec{v}}(M_1) = (3,-3)$

$M_2(0,1) \in d \to M_2' = T_{\vec{v}}(M_2) = (2,-2)$

Vậy d' đi qua M'_1, M'_2, vậy d' có phương trình: $x+y=0$.

Cách 2: Từ biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+3 \end{cases} \Leftrightarrow x'+y'=0$$

Vậy phương trình đường thẳng d': $x+y=0$.

Cách 3: Đường thẳng $d' = T_{\vec{v}}(d)$ $d'//d$. Lấy $M_1 \in$ d, $M_1(1, 0)$

$\Rightarrow T_{\vec{v}}(M_1) = M_1'(3,-3)$.

(d') có phương trình: $x+y+m=0$ và đi qua $M'(3,-3)$

$\Rightarrow 3-3+m=0 \Leftrightarrow m=0 \Leftrightarrow (d'): x+y=0$.

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(2,-3)$.

Giải

Cách 1: Đường tròn xác định được khi biết tâm và bán kính.

(C) có tâm $I_C(1, 3)$; R = 3 $\Rightarrow I_c' = T_{\vec{v}}(I_c) = (1+2; 2-3) = (3;-1)$.

Vậy $(C') = T_{\vec{v}}(C) \Leftrightarrow (C'): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Cách 2: Biểu thức toạ độ $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+3 \end{cases}$

Vậy biểu thức toạ độ:

$(C'): (x'-2)^2 + (y'+3)^2 - 2(x'-2) - 4(y'+3) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x'^2 - 4x' + 4 + y'^2 + 6y' + 9 - 2x' + 4 - 4y' - 12 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 6x' + 2y' + 1 = 0 \Leftrightarrow (x'-3)^2 + (y'+1) = 9.$

Bài 3. Cho (d_1): $x+2y-5=0$; (d_2): $x+2y+5=0$.

Hãy tìm $\vec{v}$ vuông góc với (d_1) để (d_2) là ảnh của (d_1) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1: Lấy M $\in d_1$; M(1, 2) $\in d_1$. Qua M(1, 2) viết $\Delta \perp d_1$: (Δ): $2x - y + m = 0$ vì Δ đi qua M(1,2) $\Rightarrow$ m = 0 $\Rightarrow$ $(\Delta): 2x - y = 0$

Lấy M' = (Δ) $\cap$ (d_2); M' có toạ độ là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(-1, -2)$$

Vậy $\vec{v} = \overrightarrow{MM'} = (-2, -4)$.

Cách 2: Gọi vectơ $\vec{v} = k\overrightarrow{n_{pt_{d_1}}} = k(1,2) = (k, 2k)$; $\vec{v} \perp d_1$ và $\vec{v} \perp d_2$ vậy:

Theo định nghĩa phép tịnh tiến:
$$\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y + 2k \end{cases} \Leftrightarrow x' + 2y' + 5 = x + k + 2y + 4k + 5 = 0 \Leftrightarrow 5k + 10 = 0 \Rightarrow k = -2$$

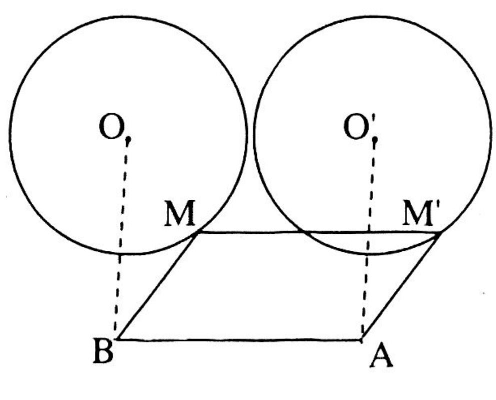
Vậy vectơ tịnh tiến $\vec{v} = (-2, -4)$.

Dạng 2: Sử dụng phép tịnh tiến để giải bài toán quỹ tích

Phương pháp giải:

- *Tìm quỹ tích M. Xét M là ảnh của điểm I qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ nào?*
- *$I \in$ hình (H) $\Rightarrow$ M thuộc hình ảnh của (H) qua $T_{\vec{v}}$*

Bài 4. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B không thuộc đường tròn, một điểm M chạy trên đường tròn. Tìm tập hợp các điểm M' là đỉnh còn lại của hình bình hành ABMM'.



Giải

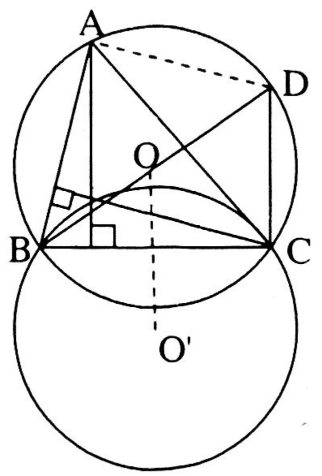
Giả sử hình bình hành ABMM' có

M $\in$ (O, R) cho trước ta có: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA}$

Xét $T_{\overrightarrow{BA}}: (P) \to (P)$ (mặt phẳng P) thì $T_{\overrightarrow{BA}}: (M) \to M'$

mà M $\in$ (O, R) thì $M' \in T_{\overrightarrow{BA}}(O, R) = (O', R)$.

Vậy tập hợp M' là đường tròn ảnh của đường tròn (O, R) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$. Đường tròn (O',R) trong đó: $O' = T_{\overrightarrow{BA}}(O)$ với $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BA}$.



Bài 5. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm BC cố định trên đường tròn đó. Một điểm A di động trên

đường tròn. Hãy tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.

Giải

Vẽ đường kính BD.

AH ⊥ BC, DC ⊥ BC ⇒ AH // DC.

Tương tự: CH ⊥ AB ⇒ DA ⊥ AB ⇒ CH // AD.

Vậy AHCD là hình bình hành. B, C cố định nên D cố định: Ta cóó: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$. Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}(A) = H$ (H là ảnh của A qua phép tịnhh tiến $\vec{v} = \overrightarrow{DC}$; A chạy trên đường tròn (O, R) nên H chạy trên đường trònn $(O', R) = T_{\overrightarrow{DC}}(O, R)$.

Bài 6. Hãy viết phương trình ảnh của parabol $y = x^2$ qua phép tịnh tiếến theo vectơ $\vec{v} = (3,2)$.

Giải

Gọi M(x, y) thì $M' = T_{\vec{v}}(M)$ có toạ độ: $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Vậy ảnh của parabol $y = x^2$ có phương trìnhh: $y' - 2 = (x' - 3)^2 \Leftrightarrow y' = x'^2 - 6x' + 11$.

Đó là parabol: $y = x^2 - 6x + 11$.

Dạng 3: Dùng phép tịnh tiến để giải bài toán dựng hình

Phương pháp chung:

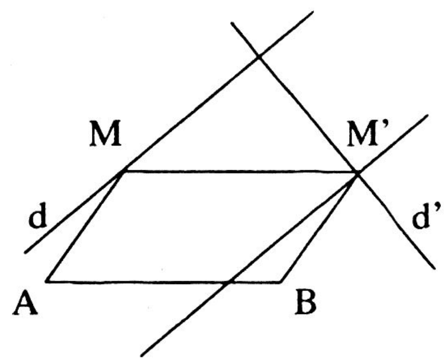
- *Dựng một hình H, quy về dựng một số điểm xác định thuộc hìnhh H.*
- *Dựng điểm M, tìm cách xác định nó hoặc ảnh của nó qua phéép tịnh tiến.*

* *Chú ý: Một điểm xác định được khi nó xác định hai điều kiện (Giao củủa hai đường, hoặc ảnh của đường với một đường qua phép tịnh tiến).*

Bài 7. Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau và hai điểm A, B không thuộộc hai đường thẳng đó. Hãy tìm M trên d và M' trên d' sao cho tứ giác ABM'MM là hình bình hành.

Giải

Giả sử hình bình hành AMM'B dựng được thoả mãn điều kiện của bài toán.



Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.

Vậy $M' = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$

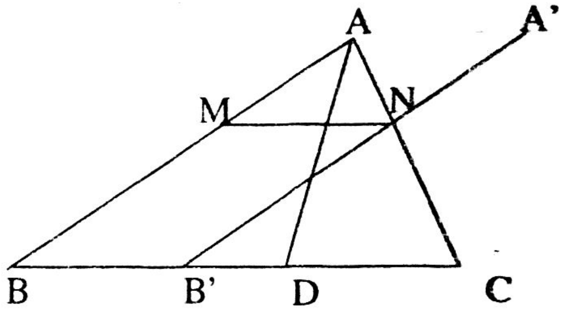
mà M' ∈ d', M' ∈ ảnh của d qua $T_{\overrightarrow{AB}}(d)$.

- Dựng ảnh của d qua

$T_{\vec{AB}} : d'' = T_{\vec{AB}}(d)$

- d'' ∩ d' = M'
- Tìm $M = T_{\vec{BA}}(M') \Rightarrow$ ABM'M cần tìm.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Tìm M trên cạnh AB và điểm N trên **cạnh AC,** MN song song với cạnh BC và AM = CN



Giải

Giả sử M, N tìm được. M ∈ AB, N ∈ AC; AM = CN; MN // BC

Từ M kẻ MD//AC ⇔ ΔAMD cân (vì DM = CN = AM)

Vậy $\widehat{MDA} = \widehat{MAD} = \widehat{DAC} \Rightarrow AD$ là phân giác góc A. D cố định.

Xét phép tịnh tiến theo $\vec{v} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow T_{\vec{DC}}(M) = N$

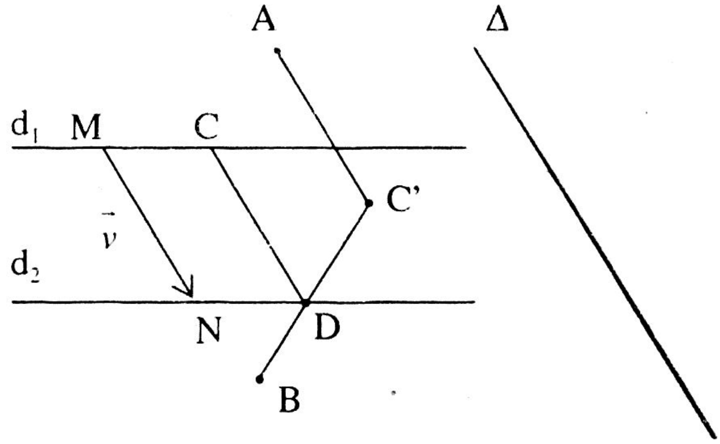
N ∈ AC; $N \in A'B' = T_{\vec{DC}}(AB)$; N = A'B' ∩ AC

Bài 9. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau và **một đường Δ** không song song với d_1, d_2. A, B là hai điểm ở hai phía của d_1, **d_2. Tìm C ∈** d_1, D ∈ d_2 sao cho CD // Δ và độ dài đường gấp khúc ACDB ngắn **nhất.**

Giải

Phân tích:

Giả sử CD tìm được thoả mãn điều kiện bài toán.



CD // Δ vậy |CD| cố định.

Vậy tìm C, D sao cho AC+BD ngắn nhất.

Kẻ AC'//CD; $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow C', D, B$ thẳng hàng thì AC + BD ngắn nhất. Suy ra cách dựng CD.

Dựng:

Lấy

$\vec{v} // \Delta$; $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$; $C' = T_{\vec{v}}(A)$

Nối C'B và C'B ∩ d_2 = D ⇒ $C = T_{\vec{v}}(D)$ ⇒ C, D cần dựng.

Chứng minh:

Giả sử có C_1D_1 thì C_1D_1=CD.

C'D_1 + BD_1 > C'B ⇔ AC_1 + BD_1 > C'D + DB.

Vậy AC_1 + C_1D_1 + D1B > AC + CD + DB ⇔ AC+CD+DB bé nhất.

II. Bài tập tự giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho A(3, -1), phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3,2)$ thành điểm nào trong các điểm sau.

a) B(6, 3) b) C(6,1) c) D(0,3) d) E(0,-3).

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy cho A(3, -1). Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(-1,2)$:

a) B(4, -3) b) C(4, 3) c) D(-4, -3) d) E(3, 4).

Bài 3. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành chính nó?

a) Không có b) Một c) Hai d) Vô số.

Bài 4. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn thành chính nó?

a) Không có b) Một c) Hai d) Vô số.

Bài 5. Cho hai đường thẳng a và a' song song với nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành a'?

a) Không có b) Một c) Hai d) Vô số.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R). Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường tròn (O, R) thành đường tròn (O', R)?

a) Không có b) Một c) Hai d) Vô số.

Bài 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

a) Phép tịnh tiến theo $\vec{v}\neq 0$ không có điểm nào biến thành chính nó
b) Phép tịnh tiến có một điểm biến thành chính nó
c) Phép tịnh tiến có hai điểm biến thành chính nó
d) Phép tịnh tiến có vô số điểm biến thành chính nó

Bài 8. Đường thẳng a và a' là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}\neq 0$. Vị trí của a và a' có khoảng cách giữa chúng lớn nhất trong các trường hợp sau:

a) a và a' vuông góc $\vec{v}$ b) a và a' không vuông góc $\vec{v}$

c) a và a' hợp với $\vec{v}$ một góc $\pi/4$ d) Không có trường hợp nào

Bài 9. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình vuông thành chính nó?

a) Một b) Hai c) Ba d) Bốn.

Bài 10. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$ với $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

a) Một b) Hai c) Ba d) Bốn.

Phần 2. Bài tập tự luyện

Dạng 1: Xác định ảnh qua phép tịnh tiến

Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy hãy viết phương trình và dựng ảnh của đường thẳng $y=2x-1$ và parabol $y=x^2+2$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}=(3,0)$.

Bài 11. Trên mặt phẳng toạ độ Đềcác vuông góc hãy tìm trên hai đường thẳng (d_1): $y = 3x + 2$ và (d_2): $y = 4x + 5$ hai điểm A ∈ d_1, B ∈ d_2 sao cho AB = 2, AB // Ox.

Bài 12*. Cho tam giác ABC trên AB lấy hai điểm D và E sao cho $AD = BE < \frac{1}{3}AB$. Kẻ DK // BC cắt AC tại K. Kẻ EF // AC cắt BC tại F. Kẻ EP // BC cắt KF tại N và cắt AC tại P. Kẻ DS//AC cắt KF tại M, cắt EP tại Q, cắt BC tại S. Chứng minh các tứ giác DMNE, KMQP, NQSF có diện tích bằng nhau.

Bài 13*. Cho tam giác ABC, BC =a, CA = b, AB = c.

a) Lấy M nằm trong tam giác, MA = x, MB = y, MC = t. Chứng minh rằng diện tích ΔABC không lớn hơn $\frac{1}{4}(ax + by + ct)$.

b) Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn và H là giao điểm của ba đường cao thì: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(aAH + bBH + cCH)$

Bài 14*. Cho hình thang ABCD, đáy nhỏ AB, đáy lớn CD. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD. Hai cạnh bên vuông góc với nhau. Chứng minh $MN = \frac{1}{2}(CD - AB)$.

Dạng 2: Sử dụng phép tịnh tiến để giải bài toán quỹ tích

Bài 15. Cho điểm A cố định, đường tròn đi qua A có bán kính R không đổi, các tiếp tuyến với đường tròn song song với đường thẳng d cho trước. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

Bài 16. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B không thuộc đường tròn. Lấy một điểm M thuộc (C) rồi dựng hình bình hành ABMM'. Tìm quỹ tích M' khi M chạy trên (C).

Bài 17. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cắt nhau ở A và B. Trên một cát tuyến thay đổi qua A lấy hai điểm M, M' sao cho AM=AM'và bằng nửa tổng hai dây cung. Tìm tập hợp điểm M, M'.

Dạng 3: Dùng phép tịnh tiến để giải bài toán dựng hình

Bài 18*. Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường tròn sao cho MA, MB cắt d tại P và Q sao cho PQ = l (cho trước).

Bài 19. Cho hai điểm A, B hai phía đối với hai đường thẳng d_1, d_2; $d_1//d_2$. Tìm hai điểm C∈d_1, D∈d_2. CD vuông góc với d_1, d_2 sao cho AC + CD + DB ngắn nhất.

Bài 20. Dựng tam giác biết độ dài ba cạnh, hai đỉnh thuộc đường thẳng d cho trước. Đỉnh thứ ba thuộc đường thẳng m không song song với d cho trước.

Bài tập tự giải

Bài 21. Cho ΔABC vuông ở A, từ P thuộc BC thay đổi vẽ PE ⊥ AB, PF ⊥ AC. Tìm tập hợp M sao cho ME : MF = 1 : 3.

Bài 22. Cho hai điểm A, A' thuộc hai đường tròn tương ứng (O_1, R); (O_2, R). Hai điểm M, M' chuyển động lần lượt trên hai đường tròn sao cho $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{A'M'}$ và ngược hướng. Tìm tập hợp trung điểm MM'.

Bài 23. Cho đường thẳng d đi qua A cố định, M ∈ d thay đổi. Với mỗi điểm M vẽ tam giác NAM cân tại N, đường tròn ngoại tiếp ΔMNA có bán kính R không đổi. Tìm tập hợp N.

Bài 24. Cho hai đường tròn (O, R) và (O_1, R_1). Hãy dựng đường thẳng d song song với đường thẳng l cho trước cắt (O, R) và (O_1, R_1) hai dây cung bằng nhau.

Bài 25. Dựng đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 // d_2$ đi qua M cho trước nằm giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

III. Hướng dẫn giải - đáp số

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
b	**a**	**d**	**b**	**d**	**b**	**a**	**a**	**a**	**a**

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 10.

a) Phương trình ảnh của đường (d): $y = 2x - 1$ theo $\overrightarrow{AB} = (3,0)$.

$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases}$ vậy (d') có phương trình: $y' = 2(x' - 3) + (-1) \Leftrightarrow y' = 2x' - 7$.

b) Phương trình ảnh của Parabol: $y = x^2 + 2$ qua $\overrightarrow{AB} = (3,0)$

Do đó ảnh của parabol có phương trình:

$y' = (x' - 3)^2 + 2 \Leftrightarrow y' = x'^2 - 6x' + 11$.

Vậy ảnh của parabol có phương trình $y = x^2 - 6x + 11$.

Bài 11.

Xét vectơ $\vec{v} = (2,0)$.

Dùng phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}(d_1) = (d'_1) \Rightarrow (d'_1)$ có phương trình: $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases}$

$(d'_1): y' = 3(x' - 2) + 2 \Leftrightarrow y' = 3x' - 4$.

Vậy (d'_1) có phương trình: $y = 3x - 4$.

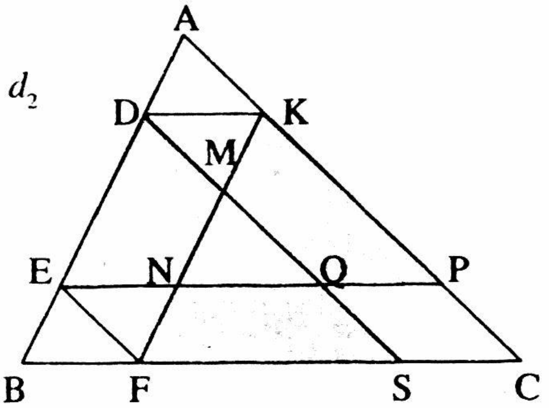
$d'_1 \cap d_2 = B$ có toạ độ $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$

B(-9, -31). Vậy A(x, y), $\overrightarrow{BA} = -\vec{v} = (-2,0)$.

$$\begin{cases} x+9=-2 \\ y+31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$$

Vậy: $A(-11,-31) \in d_1$; $B(-9,-31) \in d_2$

$\overrightarrow{AB} = (2,0) // Ox$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2.$



Bài 12. Hướng dẫn giải

Nhận xét: DK // EN // BF //QP // SC

DK = EN = BF= QP = SC

Dùng phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DK}}$:

$$\left.\begin{array}{l} D \to K \\ E \to M \\ Q \to P \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DEQ \to \Delta KNP \Rightarrow \Delta DEQ = \Delta KNP$$

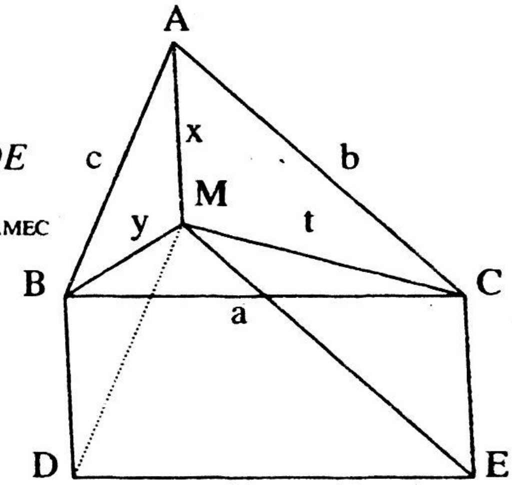
(do tính chất phép tịnh tiến)

ΔDEQ và ΔKNP có chung ΔMNQ $\Rightarrow$ $S_{DMNE} = S_{KMQP}$

Tương tự xét phép tịnh tiến:

$T_{\overrightarrow{EF}} : \Delta DEQ \to \Delta MFS \Rightarrow S_{DMNE} = S_{KMQP} = S_{QNFS}$ (đpcm)

Bài 13.



a) Chứng minh $\frac{1}{4}(ax + by + ct) \geq S_{\Delta ABC}$.

Dùng phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AM}} : \Delta ABC \to \Delta MDE$

Ta có: $S_{\Delta ABC} + S_{\diamond BDEC} = S_{\Delta MDE} + S_{\diamond ABDM} + S_{\diamond AMEC}$

$\Leftrightarrow S_{\diamond BDEC} = S_{\diamond ABDM} + S_{\diamond AMEC}$

$ax > S_{\diamond BDEC} = 2(S_{\Delta ACM} + S_{\Delta ABM})$

Tương tự:

$ct \geq 2(S_{\Delta BCM} + S_{\Delta CMA})$

$by \geq 2(S_{\Delta BMA} + S_{\Delta BMC})$

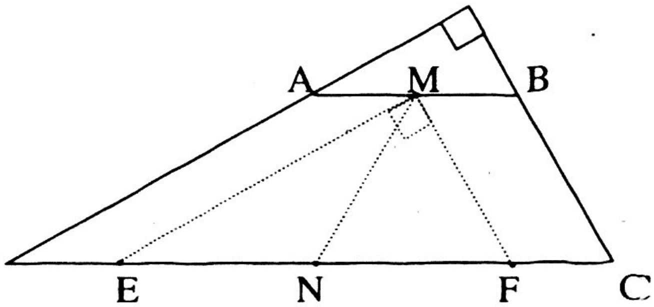
$$ax + by + ct \geq 2(2S_{\Delta ABC}) \Leftrightarrow S_{\Delta ABC} \leq \frac{1}{4}(ax + by + ct)$$

b) Vận dụng câu a) ta có: $S_{BDEF} = ax$. (AH $\perp$ BC)

$$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(aAH + bBH + cCH)$$

$(AH = x;\quad BH = y;\quad CH = t)$.

Bài 14.



$T_{\vec{AM}}: A \to M$

$\quad D \to E$

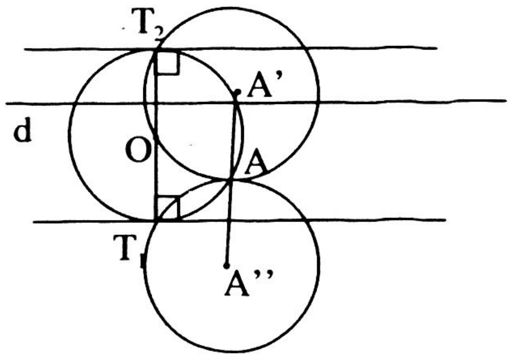
$T_{\vec{BM}}: B \to M$

$\quad C \to F$

$\Rightarrow EM \perp FM$ (Vì AD $\perp$ BC)

ΔEMF vuông $\Leftrightarrow MN = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}(DC - AB)$.

Bài 15.



OA = R. A cố định

$OT_1 \perp d$; $|\vec{OT_1}| = R$

Ta có AO = R

Vậy O chạy trên đường tròn (A, R)

Xét vectơ: $\vec{OT}$ thoả mãn:

$|\vec{OT}| = R$

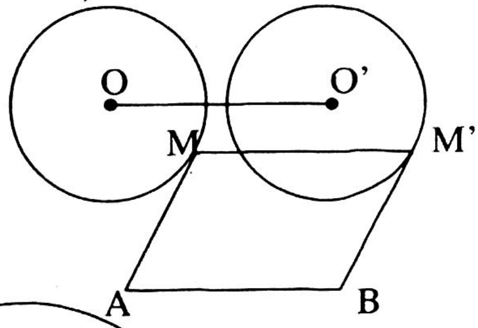
$\vec{OT} \perp d$

Vậy $\vec{OT}$ không đổi.

Xét $T_{\vec{OT}}: O \to T_2$ Vậy khi O chạy trên đường tròn (A, R) $\Rightarrow$ T_2 chạy trên đường tròn $T_{\vec{OT}}(A, R) = (A', R)$.

Còn T_1 chạy trên đường tròn: $T_{-\vec{OT}}(A, R) = (A'', R)$

Bài 16.



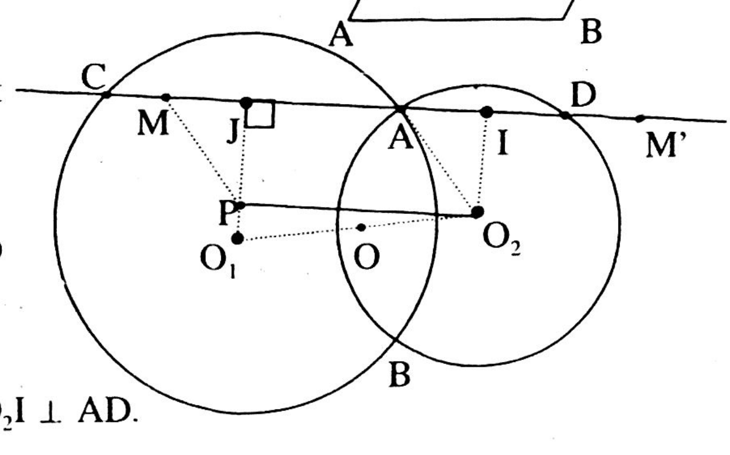
Cho (O,R); M $\in$ (O,R)

ABM'M là hình bình hành nên: $\vec{AB} = \vec{MM'}$

Xét $T_{\vec{AB}}: M \to M'$ mà $M \in (O, R)$

thì $M' \in T_{\vec{AB}}(O, R) = (O', R)$.

Bài 17.



Giả sử cát tuyến đi qua A cắt (O_1) và (O_2) tại C và D.

$AM = AM' = \frac{1}{2}CD$

Gọi I, J trung điểm của AD và AC

$\Rightarrow$ AM = JI, IJ = AM'

Nối O_1J, O_2I thì $O_1J \perp CA$, $O_2I \perp AD$.

Từ O_2 kẻ O_2P // cát tuyến CAD ⇒ OP = IJ = AM

Vậy $PMAO_2$ là hình bình hành.

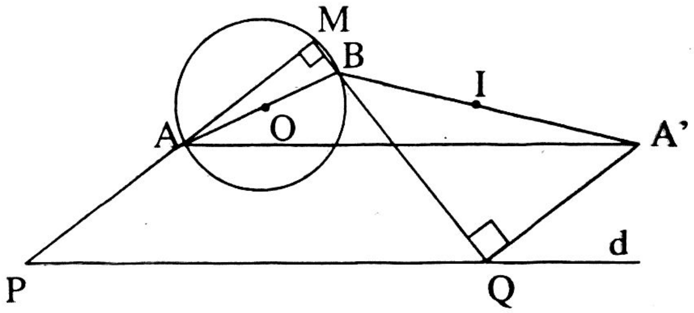
Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{O_2A}} : P \to M$ mà $P \in \left(O, \frac{1}{2}O_1O_2\right)$

$\Rightarrow M \in T_{\overrightarrow{O_2A}}\left(O, \frac{1}{2}O_1O_2\right)$.

Bài 18.

Giả sử M tìm được PQ = l;

PQ ∈ d.



Kẻ AA' //PQ.

APQA' là hình bình hành

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$

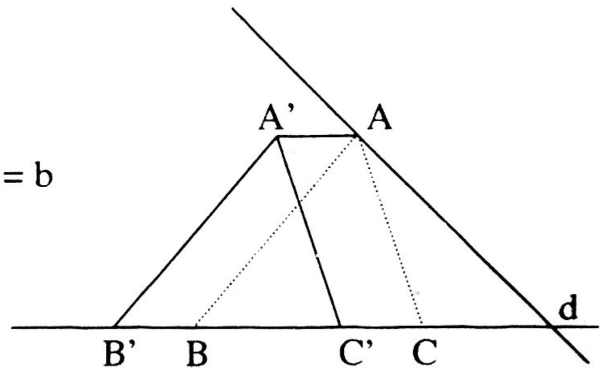
$\left|\overrightarrow{AA'}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = l$

$\widehat{BQA} = 1v$ Vậy $Q = \left(I, \frac{1}{2}BA'\right) \cap d$

$P = T_{\overrightarrow{A'A}}(Q)$.

Bài 19. (Giải tương tự bài số 9)

Bài 20.



Dựng ΔA'B'C'

B'C' ∈ d; B'C' = a; A'B' = c; A'C' = b

Từ A' kẻ A'A//d

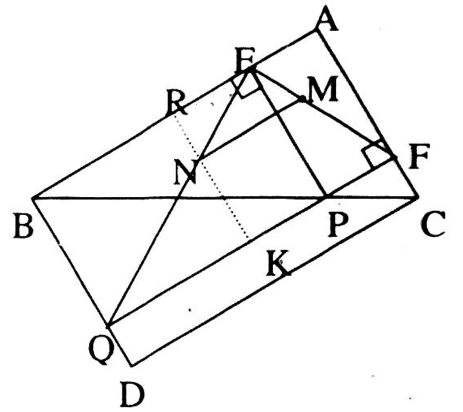
Xét phép tịnh tiến: $\overrightarrow{A'A}$

$T_{\overrightarrow{A'A}}(B') \to B \in d$

$(C') \to C \in d$

Nên ΔABC cần dựng.

Bài 21. Gợi ý



Dựng hình chữ nhật ABQF

$MN = \frac{1}{3}AB$; $EN = \frac{1}{3}NQ$. Vậy Q ∈ BD

là hình chữ nhật ABCD.

Xét $T_{\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}} : N \to M$

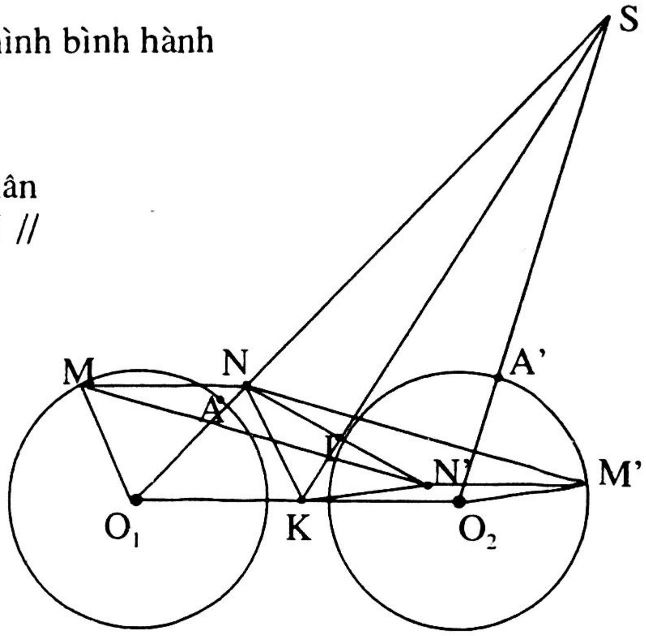
mà $N \in RK \Leftrightarrow M \in T_{\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}}(RK)$.

Bài 22.

Xét phép tịnh tiến

$\overrightarrow{O_1K}$ và $\overrightarrow{O_2K}$ (K là trung điểm O_1O_2).

$\left.\begin{matrix} M \to N \\ M' \to N' \end{matrix}\right\} \Rightarrow MNM'N'$ là hình bình hành

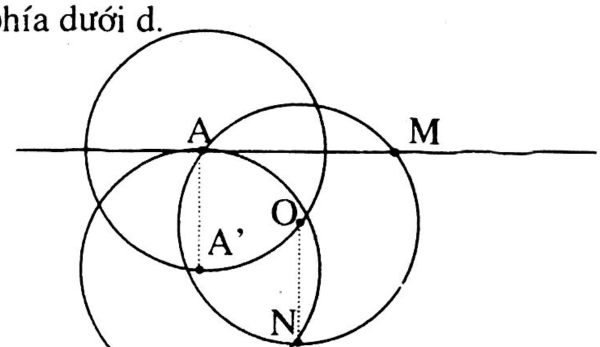


$\Rightarrow$ I là trung điểm NN'

ΔNKN' cân. Vậy KI là phân giác của góc (O_1M, O_2M'). KI // phân giác góc (O_1A, O_2A').

Vậy I thuộc phân giác KI, do M, M' $\in$ (O_1), (O_2) nên I nằm trên một đoạn thẳng đi qua K trung điểm O_1O_2 và song song phân giác O_1SO_2.

Bài 23. Gợi ý: Lấy d làm bờ xét N phía dưới d.



Ta có: ΔAMN cân

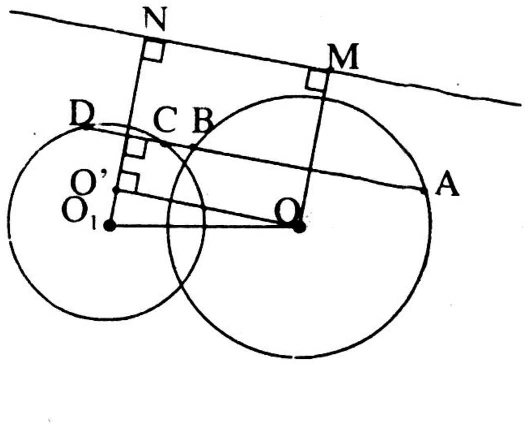
Nên ON $\perp$ d; $\overrightarrow{ON} = \vec{R}$

Xét $T_{\vec{R}}(O) \to N$

mà O thuộc vòng tròn tâm (A,R)

Vậy $N \in T_{\vec{R}}(A, R)$.

Bài 24. Từ O và O_1 kẻ OM, O_1N $\perp$ l



Kẻ OO' $\perp$ OM

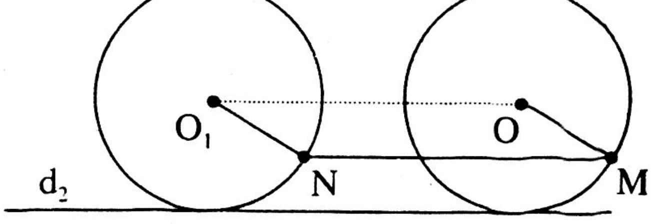
Xét $T_{\vec{OO'}} : A \to C$

$B \to D$

$(O) \to (O')$

Vậy suy ra cách dựng.

Bài 25.



Dựng (O_1) tiếp xúc với d_1 và d_2.

Kẻ Mx // d_1//d_2

Mx cắt (O_1) tại N

Dùng phép $T_{\vec{NM}} : (O_1) \to (O)$ cần dựng.

PHẦN 2 . PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa:

Cho đường thẳng d. Gọi $Đ_d$ là phép đối xứng trục d khi đó $Đ_d(M) = M'$

$\Leftrightarrow \overline{M_0M'} = -\overline{M_0M}$ trong đó M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d.

- Nếu $M \in d$ thì $Đ_d(M) \equiv M$
- Nếu $M \notin d$ thì $M' = Đ_d(M)$ thì d là trung trực MM'
- Nếu hình (H): $Đ_d(H) \equiv (H)$ thì (H) có trục đối xứng là đường (d).

II. Biểu thức toạ độ

- Nếu d chọn Ox thì M(x, y): $Đ_d(M) = M'(x', y')$, khi đó ta có $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
- Nếu d chọn Oy thì M(x, y): $Đ_d(M) = M'(x', y')$, khi đó ta có $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
- Nếu d chọn đường thẳng $x = x_0$; M(x, y): $Đ_d(M) = M'(x', y')$, khi đó ta có $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$
- Nếu d chọn phân giác thứ nhất y = x (d); M(x, y): $Đ_d(M) = M'(x', y')$ khi đó ta có $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
- Nếu d chọn phân giác góc thứ 2: $d = y = -x$;
  M(x, y): $Đ_d(M) = M'(x', y')$ khi đó ta có $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

III. Một số tính chất phép đối xứng trục

1) Mỗi đường thẳng a $\perp$ trục đối xứng d thì $Đ_d(a) \equiv a$
2) A, B $\in$ Oxy và $Đ_d(A) = A'$; $Đ_d(B) = B'$ thì AB = A'B'
3) Phép đối xứng trục biến $a \to a' = Đ_d(a)$
4) Phép đối xứng trục biến một tam giác ΔABC thành ΔA'B'C' và ΔABC = ΔA'B'C'
5) Phép đối xứng trục biến góc $\widehat{xOy}$ thành $\widehat{x'O'y'}$ thoả mãn $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng trục

Phương pháp giải:

- *Dùng định nghĩa để xác định ảnh của một số điểm xác định hình.*
- *Xét thêm một số tính chất của các hình.*

Bài 26. Trong mặt Oxy: M(2, 1); (a): $x-y+1=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y-4=0$. Hãy tìm ảnh của M, của a, của (C) qua phép đối xứng trục (d): $2x-y+1=0$.

Giải

a) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng trục (d): $2x-y+1=0$.

Tìm điểm H là giao của đường thẳng d với đường thẳng m đi qua M vuông góc với d.

Phương trình của (m): $x+2y+n=0$ vì đi qua M(2, 1) nên n = –4 . Vậy phương trình của (m): $x+2y-4=0$.

H có toạ độ $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-8=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2/5 \\ y=9/5 \end{cases}$ Vậy $H\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{9}{5}\right)$

M'(x', y') có toạ độ $\begin{cases} x'+2=18/5 \\ y'+1=4/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=8/5 \\ y'=-1/5 \end{cases}$

Vậy $M'\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$.

b) Tìm ảnh của đường thẳng (a): $x-y+1=0$.

Ta thấy (a) và (d) không cùng phương nên d cắt (a) tại A thì $Đ_d(A)=A$ vậy A có toạ độ.

$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(0,1) \Leftrightarrow Đ_d(A)=A$$

Tìm B ∈ (a) ta thấy B(-2, -1) ∈ a.

Tìm B' qua $Đ_d$(B) = B'. Cách làm tương tự như tìm M.

Viết đường thẳng (l) đi qua B ⊥ (d): $2x-y+1=0$, do đó (l): $x+2y+k=0 \Leftrightarrow k=4$. Vậy (l) có phương trình: $x+2y+4=0$.

Gọi N = (I) ∩ (d):

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x + 4y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6/5 \\ y = -7/5 \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$$

Gọi B'(x',y') ta có: $\begin{cases} x' - 2 = -12/5 \\ y' - 1 = -14/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2/5 \\ y' = -9/5 \end{cases} \Rightarrow B'\left(-\frac{2}{5}; -\frac{9}{5}\right)$

Đường a' đi qua A(0, 1) và $B'\left(-\frac{2}{5}; -\frac{9}{5}\right)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB'} = \left(-2/5; -14/5\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{pt}}(7, -1)$.

Phương trình a': $7x - y + 1 = 0$.

c) Tìm ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. (C) có tâm I(1, 2) bán kính R = 3. Tìm ảnh của I qua $Đ_d(I) = I'$ cách làm tương tự: $I'\left(1/5, 12/5\right)$.

Vậy đường tròn $\left(x - 1/5\right)^2 + \left(y - 12/5\right)^2 = 9$.

Bài 27. Trên hệ toạ độ Đề các vuông góc cho đường thẳng: $y = 2x + 3$ **(1)**

a) Hãy viết đường thẳng đối xứng với (d) qua Ox.
b) Hãy viết đường thẳng đối xứng với (d) qua Oy.
c) Hãy viết đường thẳng đối xứng với (d) qua y = x.

Giải

a) Xác định đường thẳng đối xứng qua trục hoành M(x, y) điểm đối xứng M'(x', y'): $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Thay vào ta có: $-y' = 2x' + 3 \Leftrightarrow (d')$ cần viết $(d'): y = -2x - 3$.

b) Xác định đường thẳng đối xứng qua Oy: M(x, y).

M' đối xứng M qua Oy: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ Vậy (d): $y = 2x + 3 \Rightarrow (d'): y' = -2x' + 3$.

c) Đường thẳng (d') đối xứng qua đường phân giác góc thứ nhất y = x. Một điểm M(x, y) đối xứng qua y = x là M'(x', y'): $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Vậy (d') có phương trình: $x' = 2y' + 3 \Leftrightarrow (d'): y = (x - 3)\, 1/2$.

Bài 28. Trên mặt phẳng toạ độ Đề các vuông góc lấy 3 điểm A(-1, 1); B(1, 4); C(3, 2). Hãy dựng hình đối xứng tam giác ABC qua trục tung, qua trục hoành, qua phân giác góc thứ hai.

Giải

a) Đối xứng qua trục tung Oy:

$$M(x,y)\to M'(-x,y) \text{ ta có: } \begin{cases} A(-1,1)\to A'(1,1) \\ B(1,4)\ \ \to B'(-1,4) \\ C(3,2)\ \ \to C'(-3,2) \end{cases}$$

b) Đối xứng qua trục hoành Ox:

$$M(x,y)\to M'(x,-y) \text{ ta có: } \begin{cases} A(-1,1)\to A'(-1,-1) \\ B(1,4)\ \ \to B'(1,-4) \\ C(3,2)\ \ \to C'(3,-2) \end{cases}$$

c) Đối xứng qua phân giác thứ hai:

$$M(x,y)\to M'(-x,-y) \text{ ta có: } \begin{cases} A(-1,1)\to A'(-1,1) \\ B(1,4)\ \ \to B'(-4,-1) \\ C(3,2)\ \ \to C'(-2,-3) \end{cases}$$

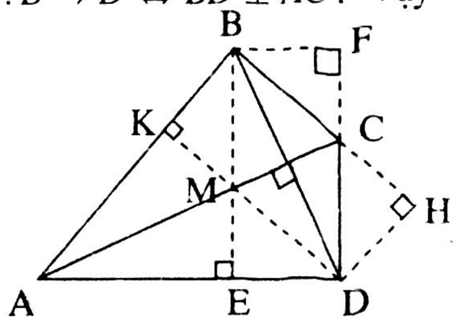
Bài 29. Cho 4 điểm A, B, C, D sao cho AB = AD, CB = CD.

a) Chứng minh AC ⊥ BD.

b) Từ B kẻ BE ⊥ DA, BF ⊥ DC, từ D kẻ DK ⊥ BA; DH ⊥ BC. Chứng minh 4 điểm E, F, K, H tạo thành bốn đỉnh hình thang cân.

Giải

a) Ta thấy A, C cách đều BD. Xét $Đ_{AC} : B \to D \Leftrightarrow BD \perp AC$. Vậy AC ⊥ BD tại I và IB = ID.



b) Xét $Đ_{AC}$: B → D

M → M

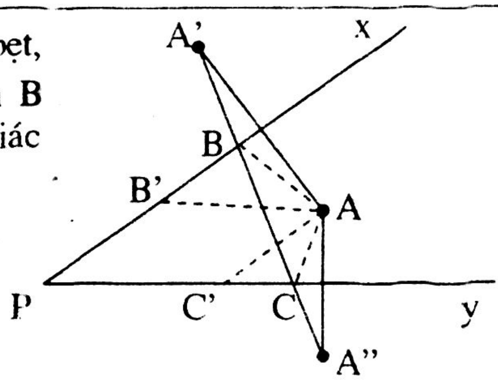
⇒ BE → DK ⇒ E → K

$Đ_{AC}$: C → C ⇒ BH → DF ⇔ H → F

Nên KEHF là hình thang cân

Dạng 2: Vận dụng phép đối xứng trục để giải bài tập quỹ tích và dựng hình

Bài 30. cho góc $\widehat{xPy}$ không là góc bẹt, một điểm A nằm trong góc đó. Hãy tìm B thuộc Px và C thuộc Py sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.



Giải

Lấy A' đối xứng với A qua Px

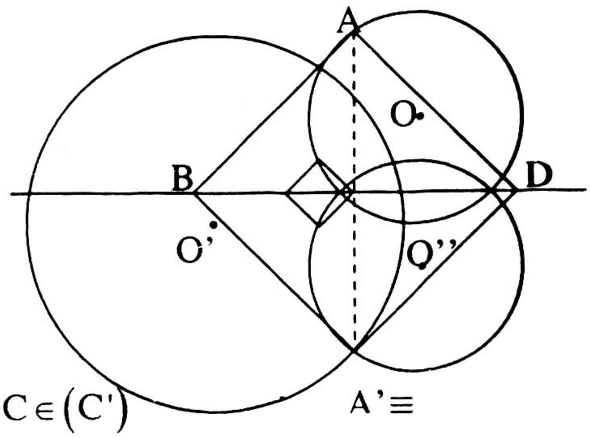
A'' đối xứng với A qua Py

Nối A''A' và A'A'' cắt Px tại B, cắt Py tại C cần tìm.

Thật vậy : Lấy B' ∈ Px ; C' ∈ Py

Chu vi ΔABC = AA' bé nhất.

Bài 31. Cho hai đường tròn (C) và (C') và một đường thẳng Δ. Hãy dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C thuộc (C) và (C'), hai đỉnh B, D thuộc đường thẳng Δ.



Giải

Ta thấy ABCD là hình vuông nên nhận BD làm trục đối xứng.

Vậy: Xét: $Đ_\Delta : B \to B$

$D \to D$

$A \to A' \equiv C$

mà $A' \in Đ_\Delta : (C) \to A' \in (C'')$ và $A' \equiv C \in (C')$

Vậy: A' = (C'') ∩ (C').

Cách tìm A'.

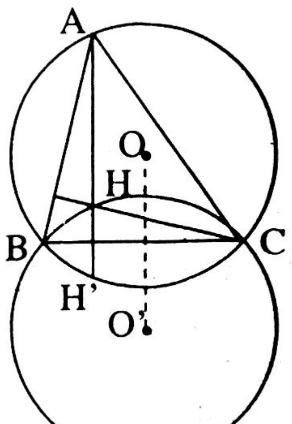
Dựng (C'') đối xứng với (C) qua Δ bằng cách dựng (O'') đối xứng với (O) qua Δ, vẽ (C'') tâm (O'') bán kính R.

A' ≡ C = (C') ∩ (C'')

AC ⊥ Δ; AC x Δ = I

IB = IC = IA = ID.

Bài 32. Cho B, C cố định thuộc đường tròn (O,R), A di động trên đường tròn đó. Tìm quỹ tích trực tâm H.



Giải

Cách 1: Xem bài tập số 5, phương pháp tịnh tiến.

Cách 2: Kéo dài AH cắt (O, R) tại H'. Ta thấy $\widehat{BCH} = \widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$.

Vậy H' và H đối xứng qua BC. Khi A chạy trên đường tròn, H' chạy trên (O, R) ⇒ H thuộc đường tròn $(O',R) = Đ_{BC}(O,R)$.

Kết luận quỹ tích H chạy trên (O',R).

II. Bài tập tự giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho M(1; 3). Hỏi M là ảnh của điểm nào trong 4 điểm sau, qua phép đối xứng trục Ox.

a) A(1; –3) b) B(–1; 3) c) C(3; –1) d) D(–1; –3).

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy cho M(2, 3). Hỏi M là ảnh của điểm nào trong 4 điểm sau, qua phép đối xứng trục Oy?

a) A(–2; –3) b) B(–2; 3) c) C(3; 2) d) D(3; –2).

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy choM(2, 3). Hỏi M là ảnh của điểm nào trong 4 điểm sau, qua phép đối xứng trục (d): y = x?

a) A(–3; 2) b)B(2; 3) c) C(–3; –2) d) D(2; –3).

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy choM(2, 3). Hỏi M là ảnh của điểm nào trong 4 điểm sau, qua phép đối xứng trục (d): y = –x?

a) A(–1; –4) b) B(–1; 4) c) C(–4; –1) d) D(–4; 1).

Bài 5. Cho A, B và đường thẳng (Δ), phép đối xứng trục (Δ) biến điểm A thành A', B thành B'. Các kết luận sau, kết luận nào sai?

a) AA', BB' vuông góc với (Δ) b) AB = A'B'

c) AB // A'B' d) Δ là trung trực của AA' và BB'.

Bài 6. Cho hai đường thẳng a và b với b là ảnh của a qua phép đối xứng trục. Có thể xác định được bao nhiêu phép đối xứng trục?

a) Một phép đối xứng trục b) Hai phép đối xứng trục

c) Có vô số phép đối xứng trục d) Không tồn tại phép đối xứng trục.

Bài 7. Hình hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng?

a) Không có b) Một c) Hai d) Vô số.

Bài 8. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng.

a) Đường tròn là hình có vô số trục đối xứng

b) Một hình có vô số trục đối xứng hình đó là đường tròn

c) Một hình có vô số trục đối xứng hình đó là những đường tròn đồng tâm

d) Một hình có vô số trục đối xứng đó là những đường thẳng song song.

Bài 9. Cho hai đường tròn (O,R) và (O_1, R). Có mấy phép đối xứng trục biến đường tròn này thành đường tròn kia?

a) Một b) Hai c) Ba d) Vô số.

Bài 10. Hình hai đường thẳng cắt nhau a, b có bao nhiêu trục đối xứng

a) Một b) Hai c) Ba d) Vô số.

Phần 2. Bài tập tự luyện

Dạng 1: Phần dựng ảnh qua phép đối xứng trục. Chứng minh một số tính chất hình thông qua phép đối xứng trục.

Bài 33. Cho ABCD là hình chữ nhật. Tìm các trục đối xứng của hình chữ nhật đó.

Bài 34. Cho ΔABC, trên đường phân giác ngoài góc C lấy D nào đó. Chứng minh: $DA + DB > CA + CB$.

Bài 35*. Chứng minh rằng trong các tam giác có chung đáy và diện tích bằng nhau thì tam giác cân có chu vi bé nhất.

Bài 36. Cho đường tròn: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ (C). Hãy viết phương trình đường tròn đối xứng với (C) trong các trường hợp sau:

a) Đối xứng qua $y = x$

b) Đối xứng qua $y = -x$.

Bài 37*. Chứng minh rằng tứ giác lồi có một trục đối xứng không đi qua đỉnh nào khi và chỉ khi tứ giác đó là hình thang cân.

Bài 38. Cho góc $\widehat{xPy}$ nhọn, A thuộc cạnh Px, B thuộc cạnh Py. Tìm trên một cạnh của góc $\widehat{xPy}$ một điểm C sao cho ΔABC cân.

Bài 39. Cho hai điểm A, B và đường thẳng Δ.

a) Tìm trên Δ một điểm P sao cho AP + PB bé nhất với A, B cùng phía đối với Δ.

b) Tìm trên Δ một điểm Q sao cho $|QA - QB|$ lớn nhất với A, B khác phía đối với Δ.

Bài 40. Cho ΔABC cân (AB = AC) nội tiếp trong đường tròn (O,R), gọi E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đường CE cắt (O,R) tại D. BE cắt (O,R) tại F. Chứng minh EDAF hình thoi.

Bài 41. Trên các cạnh bên AC và BC của tam giác cân ABC cho các điểm M, N sao cho $CM + CN = AC$. Chứng minh rằng ba trung điểm của AC, BC, MN thẳng hàng.

Bài 42. Cho một đường thẳng xy và hai điểm A, B cùng phía. Hãy tìm trên (x, y) một điểm Q sao cho: $\widehat{AQx} = \widehat{BQy}$.

Bài 43. Cho hai đường tròn (C_1), (C_2) và đường thẳng d. Hãy dựng tam giác đều có đỉnh nằm trên ba đường trên. (C_1) và (C_2) khác phía với d.

Bài 44. Cho hai đường (O_1, R_1); (O_2, R_2) và điểm A. Tìm hai điểm B, C lần lượt thuộc (O_1) và (O_2) sao ΔABC cân đỉnh A, có cạnh đáy BC song song với O_1O_2.

Bài 45. Cho hình vuông ABCD; AB'C'D' có cạnh a. Xác định phép đối xứng trục biến ABCD thành AB'C'D'.

Bài 46. Cho (O, R) và ba đường thẳng a, b, c đi qua O. Dựng Δ ABC ngoại tiếp đường tròn và các đường thẳng đã cho là phân giác trong tam giác.

Bài 47. Cho ΔABC nhọn. Dựng tam giác MNP có ba đỉnh tương ứng nằm trên ba cạnh tương ứng BC, CA, AB sao cho chu vi ΔMNP bé nhất.

Bài 48. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O,R), điểm M thuộc đường tròn, lấy các điểm đối xứng với M qua các cạnh BC, CA, AB là M_1, M_2, M_3.

a) Tìm tập hợp các điểm M_1, M_2, M_3 khi M di động trên đường tròn.

b) Chứng minh các tập hợp M_1, M_2, M_3 chứa trực tâm tam giác ABC.

Bài 49. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và hai điểm A, B thuộc trong hai đường thẳng. Tìm trên d_1, d_2 hai điểm C, D sao cho tứ giác ABCD hình thang cân.

Bài 50. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 40^0$. Một điểm P thuộc trong tam giác thoả mãn $\widehat{PAC} = 10^0$; $\widehat{PAB} = 30^0$; $\widehat{PCA} = 20^0$. Tính góc $\widehat{BPC}$.

Bài 51. Xác định đường đi của viên bi A đến viên bi B trên bàn bi – a với điều kiện viên bi A phải chạm vào thành bàn.

Bài 52. Cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 tại O. Với một điểm P không thuộc d_1, d_2, đường thẳng Δ đi qua P thay đổi cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B. Các đường Δ_1, Δ_2 đối xứng với Δ qua d_1, d_2 cắt nhau tại M. Tìm tập hợp M khi Δ quay quanh A.

III. Hướng dẫn giải - Đáp số

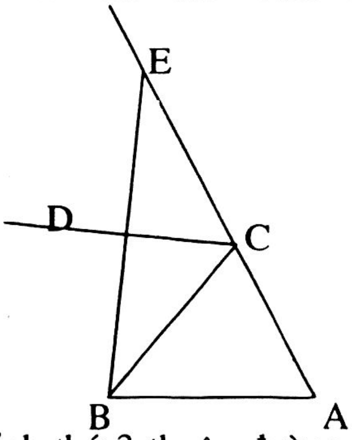
Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
a	**b**	**b**	**c**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	**b**

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 33. (Học sinh tự giải) có 2 trục đối xứng

Bài 34.



CD là phân giác ngoài góc C. Xét $Đ_{CD}$

Dựng $E = Đ_{CD}(B)$

$DA + DB = DA + DE$

$CA + CB = CA + CE = AE$

Mà $DE + DA > AE$ (đpcm).

Bài 35.

Nhận xét: Chung đáy, cùng diện tích nên đỉnh thứ 3 thuộc đường thẳng song song đáy.

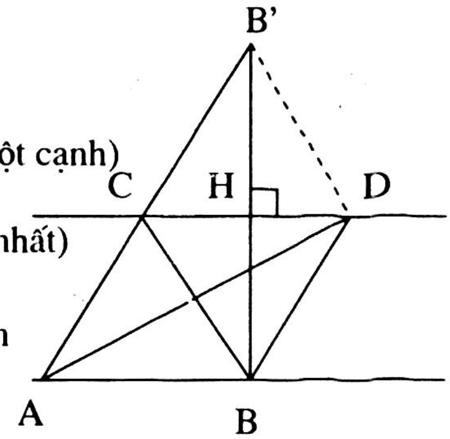
CD // AB

Lấy B' đối xứng với B qua CD.

$CA + CB = AB'$

$DA + DB = DA + DB' > AB'$.

(Tính chất tam giác : tổng hai cạnh lớn hơn một cạnh)



Bài 36.

a) Đối xứng qua y = x (d) (phân giác góc thứ nhất)

Tâm I(3, –1); R = 3.

$Đ_d(I) = I'(-1,3)$ Vậy phương trình đường tròn

$(C'): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$.

b) Đối xứng qua y = –x. Tìm ảnh của I(3, –1)

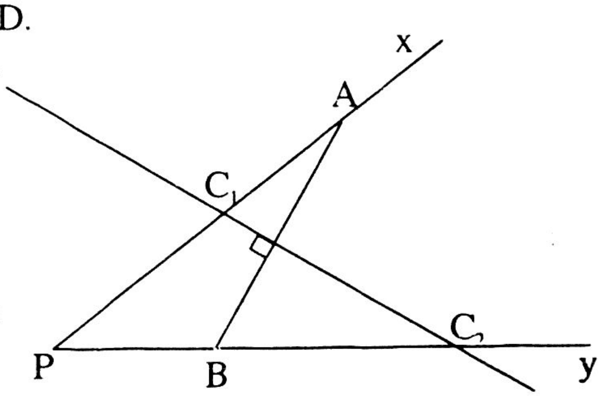
I'(1, –3) vậy (C') có phương trình: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Bài 37.

Vì trục đối xứng không đi qua đỉnh nào của tứ giác ABCD. Giả sử **có hai** đỉnh cùng một phía với trục đối xứng AB AB $\Rightarrow A' = Đ_{\Delta}(A); B' = Đ_{\Delta}(B)$;

Thì A' ≡ C; B' ≡ D. Vậy AB = CD.

và AA' // BB' ⇔ AC // BD suy ra tứ giác ABCD là hình thang cân.



Bài 38.

$A \in Px$; $B \in Py$

- ΔABC cân tại C

C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB.

$C \in Px$ hoặc $C \in Py$

- ΔABC cân tại A

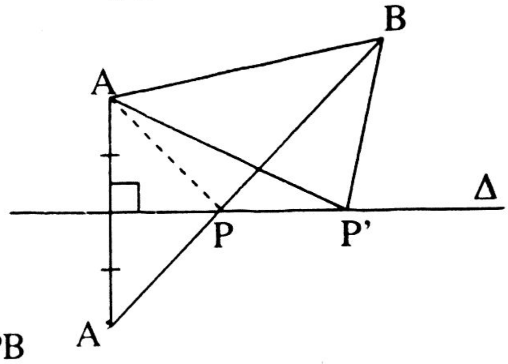
C điểm đối xứng với B qua đường đi qua A vuông góc với Py.

- ΔABC cân tại B.

C điểm đối xứng với A qua đường đi qua B vuông góc với Px.

Vậy có 4 điểm C.

Bài 39.



a) A, B cùng phía với (Δ)

Lấy: $A' = Đ_{\Delta}(A)$

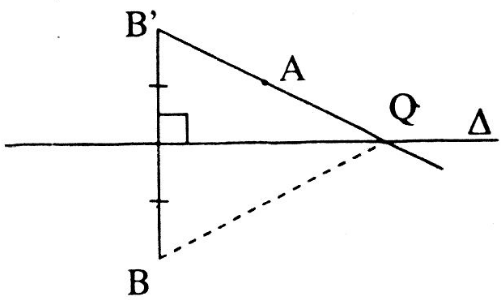
Nối A'B cắt Δ tại P cần tìm

Chứng minh

Lấy P' bất kỳ

$P'A + P'B = P'A' + P'B > BA' = PA + PB$

Vậy: $PA + PB$ bé nhất.



b) Lấy $B' = Đ_{\Delta}(B)$

Nối B'A cắt Δ tại Q

Q là điểm cần tìm.

Thật vậy: lấy P bất kỳ thuộc Δ ta có:

$|PA' - PB| = PA - PB' < B'A$

$B'A = |QB' - QA|$

Vậy $|QA - QB| = |QB' - QA|$ lớn nhất (đpcm).

Bài 40.

Cho AO là trục đối xứng của đường tròn.

Xét $Đ_{AO}$.

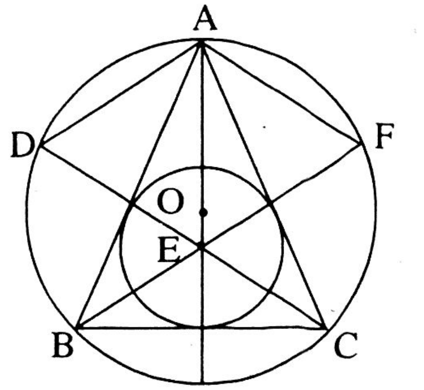
$Đ_{OA}(O,R) \to (O,R)$

$B \to C$

$E \to E$

Vậy: $BE \to CE \Leftrightarrow F \to D$.

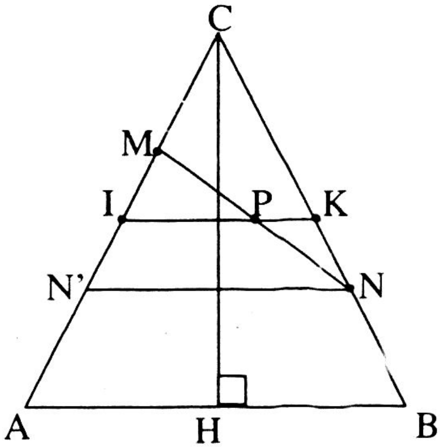
$\Rightarrow$ **ADEF Là** hình thoi (đpcm).



Bài 41.

Gọi I, P, K trung điểm CA, MN, CB.

ΔACB cân ở C.



$M \in CA$; $N \in CB$;

$CM + CN = AC$.

Vậy ΔACB nhận CH làm trục đối xứng.

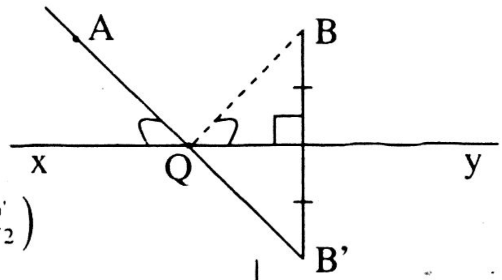
Xét: $Đ_{CH}(N) \to N'$

$K \to I$ (I và K trung điểm CA, **CB)**

Vì $BN = CM \Rightarrow AN' = CM \Rightarrow I$ là trung **điểm của CA**

$\Rightarrow$ **I là trung** điểm $N'M \Rightarrow IK$ là trung bình **$\Delta MNN''$, nghĩa** là I, P, K thẳng hàng.

Bài 42.



Lấy $B' = Đ_{xy}(B)$

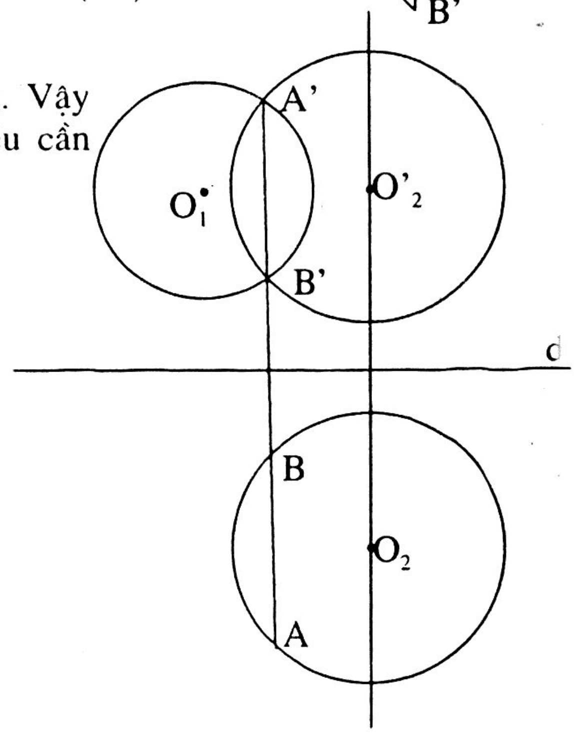
$AB' \cap (xy) = Q$ cần tìm.

Bài 43.

Lấy đối xứng của (C_2) qua $Đ_d(C_2) \to (C_2')$

$C_2' \cap (C_1) = A'B'$

Khi đó có cạnh Δ đều cần dựng. Vậy **cách dựng trên** có bốn tam giác đều cần **dựng.**



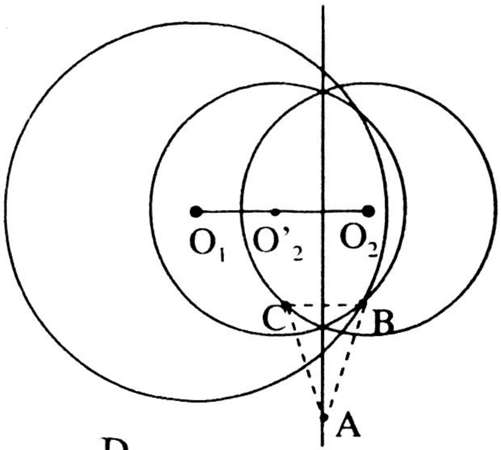
Bài 44. Kẻ O_1O_2, Kẻ $Ax \perp O_1O_2$.

Lấy (O'_2) đối xứng với (O_2) qua Ax

(O'_2) cắt (O_1) tại B

Lấy C đối xứng với B qua Ax

ΔABC cần dựng thoả mãn điều kiện của bài toán.



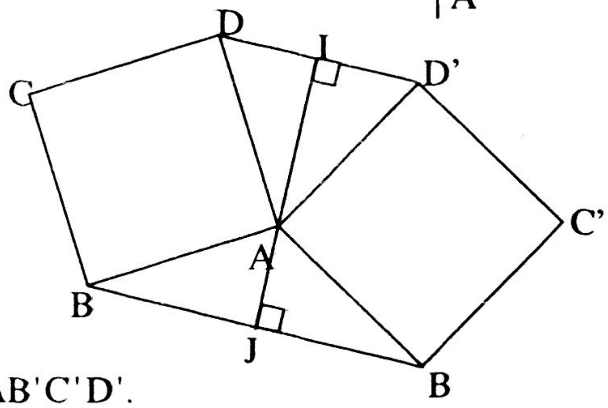
Bài 45.

Xác định các trung điểm I, J của BB' và DD'.

Khi đó I, J, A thẳng hàng.

Vậy AI, J $\perp$ DD'; AI,J $\perp$ BB'

$$\text{Xét:}\quad \left.\begin{array}{l} Đ_{IJ}: B \to B' \\ D \to D' \\ C \to C' \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \to AB'C'D'.$$



Bài 46.

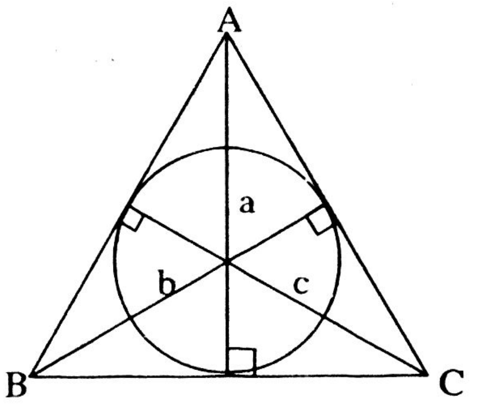
Gợi ý:

Xét

$Đ_a: AB \to AC$

$Đ_b: AD \to BC$

$Đ_c: AC \to BC$



Vậy giao điểm các đường a, b, c với đường tròn là các trung điểm **ΔABC** ngoại tiếp.

Bài 47.

Giả sử MPQ dựng được

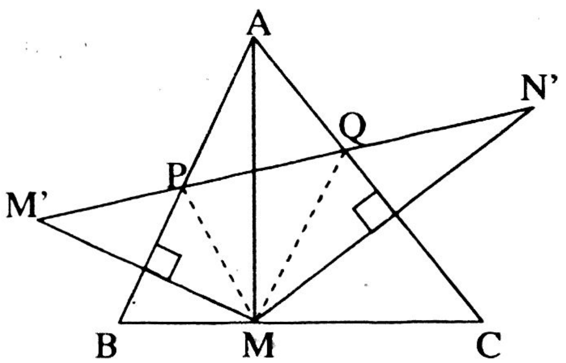
Lấy M', N' đối xứng qua AB, AC của M thì chu vi

$$\Delta PMN = M'P + PQ + QN'$$

nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow M'P + PQ + QN' = M'N'$$

Và $\widehat{M'AN'} = 2\widehat{BAC}$



Xét $\Delta AM''N$ cân góc $\widehat{M'AN} = 2\widehat{ABC}$

Cạnh M'N' bé nhất khi AM' bé nhất $\Leftrightarrow$ AM = AH.

Vậy M là chân đường cao.

Bài 48.

a) Cho đường tròn (O, R), ΔABC nội tiếp , M thuộc đường tròn.

Xét M_1 đối xứng với M qua BC.

$Đ_{BC} : (M) \to M_1 \Rightarrow M_1 \in Đ_{BC}(O,R)$

Nhận thấy $\exists H' \in (O,R) \Rightarrow Đ_{BC}(H') = H \Leftrightarrow H \in Đ_{BC}(O,R)$.

Tương tự: $Đ_{AC} : (M) \to M_2 \Rightarrow M_2 \in Đ_{AC}(O,R)$.

Và $H'' \in (O,R) \Rightarrow Đ_{AC}(H'') = H \Rightarrow H \in Đ_{AC}(O,R)$

$Đ_{AB}(M) \Rightarrow M_3 \Rightarrow M_3 \in Đ_{AB}(O,R)$

$H''' \in (O,R) \Rightarrow Đ_{AB}(H''') = H \Rightarrow H \in Đ_{AB}(O,R)$.

Kết luận: quỹ tích (tập hợp) M_1, M_2, M_3 là ba đường tròn đối xứng với (O,R) qua CB, CA, AB và đi qua trực tâm H.

Bài 49.

Giả sử hình thang ABCD cần dựng.

Xét $Đ_{xy}$ với xy là trung trực AB thì:

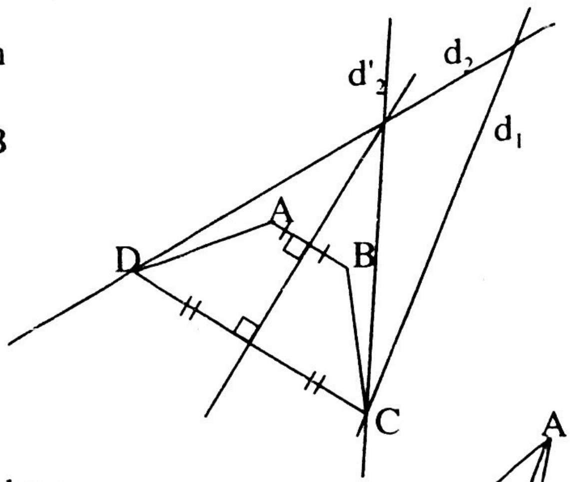
$Đ_{xy} : A \to B$

$D \to C = D'$

mà $D \in d_2 \to D' \in d_2'$ và $D' \equiv C$.

Vậy: $C = Đ_{xy}(d_2) \times d_1 = d_2' \times d_1$

Vậy: $D = Đ_{xy}(C) \Rightarrow ABCD$ cần dựng



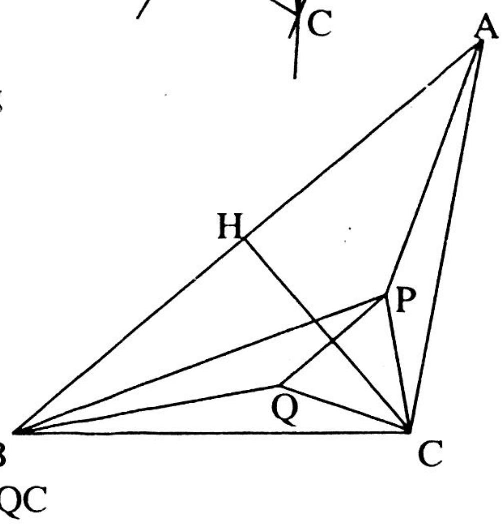
Bài 50

ΔABC cân đỉnh C; $\widehat{C} = 100^0$.

$Đ_{CH} : P \to Q$

Vậy: $CP = CQ$

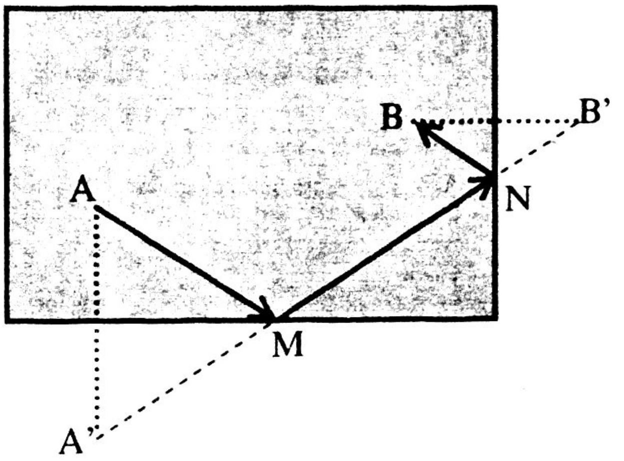
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{BQP} = 150^0 \\ \widehat{BQC} = 150^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BQP = \Delta BQC$$



$\Rightarrow \Delta BPC$ cân $\Rightarrow \widehat{BPC} = \widehat{BCP} = 100^0 - 20^0 = 80^0$.

Bài 51.

Dựa vào phép đối xứng trục chỉ ra đường đi của bi A đến B. Và dựa vào tính chất phản xạ ánh sáng để giải.



Bài 52.

Lấy đối xứng qua d_1, d_2 của P là P_1, P_2 thì $P_1 \in \Delta_1; P_2 \in \Delta_2$.

Góc:

$\left(\widehat{\Delta_1, \Delta}\right) = 2\left(\widehat{\Delta, d_1}\right)$

$\left(\widehat{\Delta, \Delta_2}\right) = 2\left(\widehat{\Delta, d_2}\right)$

$\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right) = 2\left(\widehat{d_1, d_2}\right)$

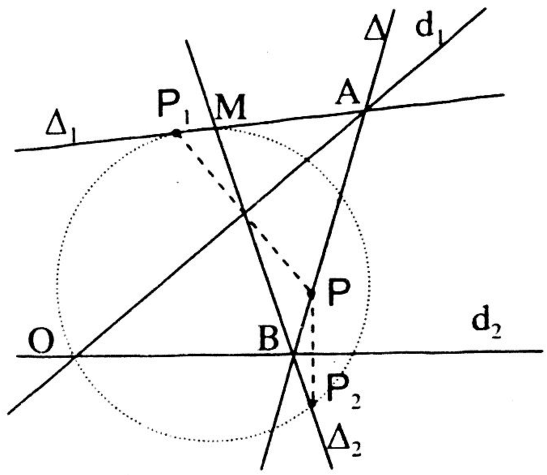
Vậy: $\widehat{P_2MP_1} = 2\left(\widehat{d_1, d_2}\right)$

mà: $\widehat{P_1OP_2} = 2\left(\widehat{d_1, d_2}\right)$

Vậy: P_1P_2OM thuộc đường tròn.

Mà P_1,P_2, O cố định.

Vậy M thuộc đường tròn O,P_1,P_2.



PHẦN 3 . PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa: Cho điểm I. Gọi phép đối xứng tâm I, kí hiệu $Đ_I$ khi đó:

$$M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$$

- Điểm kép: $Đ_I(M) = M$. Vậy $M \equiv I \Leftrightarrow$ I là điểm kép.
- Hình kép: Nếu $f(H) = H$; hình H gọi hình kép qua phép đối xứng tâm I.

II. Biểu thức toạ độ: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $I(x_0,y_0)$, gọi $M(x, y)$ và $M'(x',y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I, khi đó: $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

III. Tính chất phép đối xứng tâm:

1) Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ A, B có ảnh A', B' $\Leftrightarrow AB = A'B'$.
2) Phép đối xứng tâm biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
3) Phép đối xứng tâm biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
4) Phép đối xứng tâm biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
5) Phép đối xứng tâm biến đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Dựng ảnh của hình qua phép đối xứng tâm I.

Phương pháp giải:

- *Dùng định nghĩa phép đối xứng tâm xác định ảnh của các điển xác định hình dựa vào tính chất đối xứng tâm.*
- *Dựa vào biểu thức toạ độ phép đối xứng tâm để tìm ảnh của một điển.*

Bài 53. Cho $I(-2,1)$ và đường thẳng (d): $x - 2y + 1 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng (d') là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

Giải

Cách 1: M(x, y) qua phép đối xứng tâm $I(-2,1)$ có M'(x', y')

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$$

Thay vào ta có: (d'): $-4 - x' - 2(2 - y') + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -x' + 2y' - 8 + 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0$.

Vậy (d') có phương trình: $x - 2y + 7 = 0$.

Cách 2: Lấy hai điểm M, N thuộc (d): $x-2y+1=0$. Tìm **hai điểm M', N'** đối xứng với M, N qua $I(-2,1)$. (d') đi qua M', N'.

Ta có: $M(1,1); N(-3,-1)\in(d)$

$Đ_I(M)=M'(-5,1)$

$Đ_I(N)=N'(-1,3)$

d' đi qua M'N' nhận: $\overrightarrow{u_{d'}}=\overrightarrow{M'N'}=(4,2)$

Vậy véctơ pháp tuyến: $\vec{n}=(1,-2)$.

(d') có phương trình: $1(x+1)-2(y-3)=0\Leftrightarrow x-2y+7=0$.

(d') có phương trình: $x-2y+7=0$.

Bài 54. Cho đường tròn có phương trình: $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ **(C) và** $I(-1,-2)$. Hãy tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm I.

<u>*Giải*</u>

Ảnh của đường tròn qua phép đối xứng tâm $I(-1,-2)$ là đường **tròn (C') có tâm** là ảnh của tâm (C) qua phép đối xứng tâm I. Bán kính bằng bán **kính đường tròn (C)**.

(C) có: $O(1,2)$; $R=\sqrt{5+4}=3$

Gọi $O'=Đ_{I(-1,-2)}(O)=(-3,-6)$.

Vậy (C') có phương trình: $(x+3)^2+(y+6)^2=9$.

Bài 55. Cho hai đường thẳng (d_1): $x-2y+5=0$ và (d_2): $x-2y-8=0$. **Hãy** tìm phép đối xứng tâm biến đường thẳng d_1 thành d_2.

<u>*Giải*</u>

Nhận xét: $d_1 // d_2$. Vậy tâm đối xứng $M\in d_1$; $M'\in d_2$.
Tâm I_1 là trung điểm của MM'.
Ta thấy: $M(-1,2)\in d_1$; $M'(4,-2)\in d_2$.

Vậy: $I_1\left(\frac{3}{2},0\right)$ là tâm đối xứng $Đ_{I_1}(d_1)\to(d_2)$

Chú ý: I thuộc trên đường thẳng song song với (d_1): $x-2y+5=0$, (d_2): $x-2y-8=0$ Khoảng cách đường thẳng Δ đến d_1 bằng **khoảng cách Δ đến d_2**.

Bài 56. Tìm phép đối xứng tâm biến đường thẳng (d_1): $x-2y+5=0$ thành (d_2): $x-2y-8=0$ và có tâm nằm trên Ox.

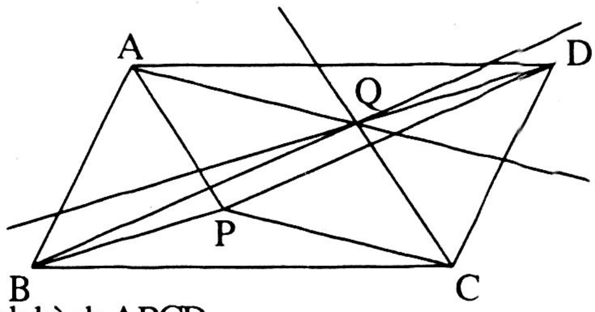
<u>*Giải*</u>

Tâm đối xứng nằm trên Ox và nằm trên đường thẳng Δ **đi qua** $I_1\left(\frac{3}{2},0\right)$ và song song $x-2y+5=0$.

Vậy Δ: $x - 2y + m = 0 \Leftrightarrow I \in \Delta \Leftrightarrow \frac{3}{2} + m = 0 \Leftrightarrow (\Delta): x - 2y - \frac{3}{2} = 0$

Vậy I có toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Bài 57. Cho hình bình hành ABCD, một điểm P nằm trong mặt phẳng ABCD. Kẻ Ax//CP; By//DP; Cz//AP, Dk//BP. Chứng minh rằng Ax, By, Cz, Dk đồng quy tại một điểm Q và đường PQ đi qua một điểm cố định khi P di động trong mặt phẳng.



Giải

Xét phép đối xứng tâm O của hình bình hành ABCD.

$Đ_{(O)}: P \to Q$

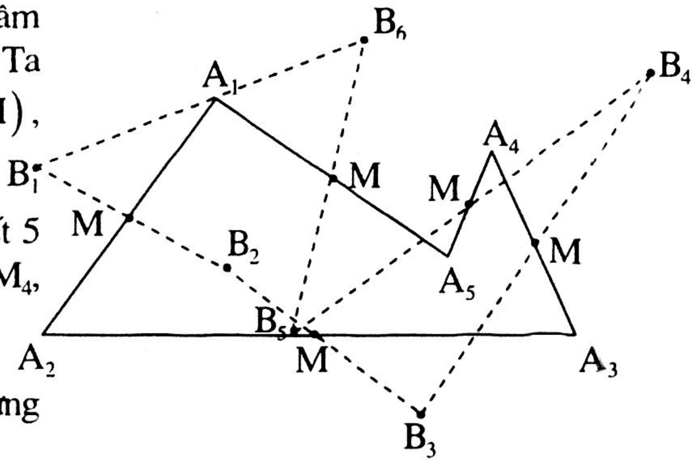
Khi đó: $D \to B \Leftrightarrow DP // BQ \equiv By$

Tương tự Ax đi qua AQ. Vậy Ax, By, Cz, Dk đi qua Q đối xứng với P qua O.

Dạng 2: Vận dụng phép đối xứng tâm để giải bài tập quỹ tích và dựng hình

Phương pháp chung : Tìm tâm M thoả mản một số tính chất α. Ta quy về tìm tập M' mà $M' = Đ_I(M)$, $M' \in (H')$. Xét $Đ_I(M') = M$

Bài 58. Dựng đa giác 5 cạnh biết 5 trung điểm các cạnh M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Hãy tổng quát hoá.



Giải

Giả sử đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ dựng được, ta có: lấy B_1, xét:

$Đ_{M_1}: B_1 \to B_2 \Rightarrow B_1A_1 \neq A_2B_2$

$Đ_{M_2}: B_2 \to B_3 \Rightarrow B_2A_2 \neq A_3B_3$

$Đ_{M_3}: B_3 \to B_4 \Rightarrow B_3A_3 \neq A_4B_4$

$Đ_{M_4}: B_4 \to B_5 \Rightarrow B_4A_4 \neq A_5B_5$

$Đ_{M_5}: B_5 \to B_6 \Rightarrow B_5A_5 \neq A_1B_6$

Vậy: $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_5B_5 = A_1B_6$.

Vậy A_1 là trung điểm của B_1B_6 suy ra cách dựng.

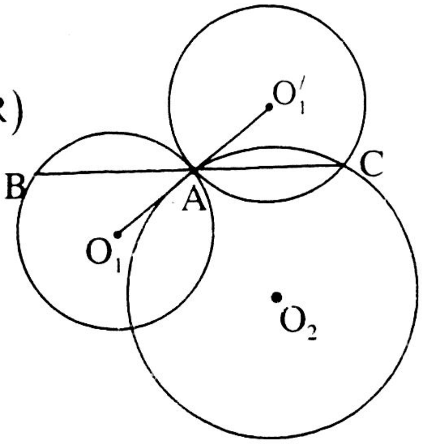
Bài toán có một nghiệm duy nhất.

Tổng quát hoá:

Xét đa giác n cạnh: (Với n lẻ: có 1 đa giác; với n chẵn: chưa xác định được).

Bài 59. Qua giao điểm của hai đường tròn (O_1, R_1); (O_2, R_2) dựng đường thẳng cắt hai đường tròn thành hai dây bằng nhau.

Giải



Phân tích giả sử dựng được: AB = AC

Xét: $Đ_A : B \to C$ mà $B \in (O_1) \to C \in Đ_A(O_1, R)$

Vậy: $C = (O_2, R_2) \times (O_1', R_1)$,

trong đó $O_1' = Đ_A(O_1)$.

Cách dựng:

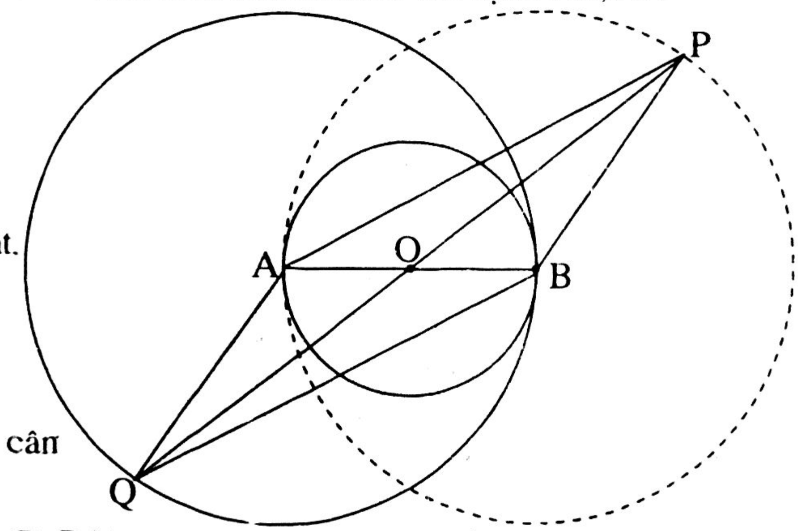
Dựng: $(O_1', R_1) = Đ_A(O_1, R_1)$;

Lấy: $(O_1', R_1) \times (O_2, R_2) = C \to B = Đ_A(C)$.

Bài 60. Cho đường tròn đường kính AB tâm O. Trên tia AC lấy điểm P sao cho AC = CP.

a) Tìm tập hợp điểm Q là đỉnh của hình bình hành có hai cạnh PA, PB.

b) Tìm tập hợp các điểm M là đỉnh hình bình hành có các cạnh AB, AP.



Giải

a) APBQ là hình chữ nhật.

Xét $Đ_{(O)}(P) \to Q$

Vậy ta tìm tập P.

ΔABP có $BC \perp AP$

mà $AC = CP \Rightarrow \Delta ABP$ cân

$\Rightarrow AB = AP$

$\Rightarrow$ P thuộc đường tròn (B, BA).

Vậy: $Q \in Đ_O(B, BA) = (A, BA)$.

b) Có thể có 2 điểm M $M = I_{AB}(P)$.

II. Bài tập tự giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho $I(1, -1)$. Cho biết trong 4 điểm sau điểm nào là ảnh của điểm $M(3, -2)$ qua phép đối xứng tâm I.

a) A(–5, 0) b) B(–1; 0) c) C(–4; 0) d) D(5; 0)

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy cho $I(1,-1)$ và đường thẳng (Δ): x = 2. Các đường thẳng sau đây đường nào là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm I?

a) $x = -2$ b) $x = -1$ c) $x = 0$ d) $x = 1$

Bài 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Phép đối xứng tâm không có điểm kép.
b) Phép đối xứng tâm có một điểm biến thành chính nó.
c) Phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó.
d) Phép đối xứng tâm có ba điểm biến thành chính nó.

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (Δ): $x - y + 4 = 0$. Trong các đường thẳng sau đường nào biến thành (Δ) qua phép đối xứng tâm?

a) $x + y + 3 = 0$ b) $2(x - y) + 6 = 0$

c) $2(x + y) - 3 = 0$ d) $2x - y + 5 = 0$.

Bài 5. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + y - 11 = 0$ (C) và I(1, 1). Các đường tròn sau đường tròn nào là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm I?

a) $x^2 + y^2 + 4x - y - 11 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.

Bài 6. Hai đường tròn (O_1, R) và (O_2, R) có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến (O_1, R) thành (O_2, R)?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

Bài 7. Một điểm M(x, y), điểm nào đối xứng với M qua phép đối xứng tâm gốc toạ độ?

a) $M(x,-y)$ b) $M(-x,-y)$ c) $M(-x,y)$ d) có kết quả khác.

Bài 8. Cho đường thẳng (Δ): $2x - y + 1 = 0$, đường thẳng nào sau đây đối xứng với (Δ) qua gốc toạ độ?

a) $(\Delta_1): 2x - y - 1 = 0$ b) $(\Delta_2): 2x + y + 1 = 0$

c) $(\Delta_3): 2x + y - 1 = 0$ d) $(\Delta_4): -2x - y + 1 = 0$.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD, các mệnh đề sau thì mệnh đề nào đúng.

a) ABCD có 1 tâm đối xứng b) ABCD có 2 tâm đối xứng
c) ABCD có 3 tâm đối xứng d) ABCD có vô số tâm đối xứng.

Bài 10. Cho (Δ): $y = 3x + 5$ và điểm $M(3,1)$. Các đường thẳng sau đường nào đối xứng với (Δ) qua điểm $M(3,1)$?

a) $(\Delta_1) y = 3x + 21$ b) $(\Delta_2) y = 3x - 21$

c) $(\Delta_3) y = -3x + 21$ d) $(\Delta_4) y = -3x - 21$.

Phần 2. Bài tập luyện tập

Bài 61. Cho góc $\widehat{xOy} < 180^0$, một điểm $P \in \widehat{xOy}$. Qua P dựng một đường thẳng cắt Ox, Oy tại A, B sao cho tam giác AOB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 62. Cho ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Từ M_1, M_2, M_3, M_4 trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA vẽ vuông góc với cạnh đối diện. Chứng minh các đường này đồng quy.

Bài 63. Cho hai dây AB; CD không cắt nhau trong đường tròn (O, R); I là điểm thuộc CD. Tìm trên đường tròn một điểm M sao cho AM, BM cắt CD tạo thành một đoạn EF nhận I làm trung điểm.

Bài 64. Cho hai đường tròn (O_1, R) và (O_2, R) tiếp xúc với nhau tại M. Ba đường thẳng đi qua M cắt (O_1) tại A_1, B_1, C_1; cắt (O_2) tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta A_2B_2C_2$.

Bài 65. Cho đường tròn (O, R) và ΔABC cố định. Một điểm M thuộc đường tròn, lấy M_1 đối xứng với M qua A; M_2 đối xứng với M_1 qua B; M_3 đối xứng với M_2 qua C. Tìm quỹ tích M_3.

Bài 66. Cho ΔABC, hãy dựng 3 đường thẳng song song với các cạnh của Δ để thu được một lục giác ngoại tiếp một đường tròn.

Bài 67*. Chứng minh rằng tứ giác có một tâm đối xứng khi và chỉ khi tứ giác đó là hình bình hành.

Bài 68. Trên hệ toạ độ Đềcác vuông góc cho các đường thẳng: $y = 3x + 1$ (1); $y = -x + 6$ (2). Hãy xác định tâm đối xứng biến đường thẳng (1) thành đường thẳng $y = 3x - 3$ và biến đường tròn (2) thàng đường thẳng $y = -x$.

Bài 69. Cho đường thẳng d và P thuộc đường thẳng d, điểm A ở ngoài đường thẳng. Hãy dựng tam giác ABC biết số đo góc $\widehat{A} = \alpha$ và đường trung tuyến AP, điểm B, C thuộc d.

Bài 70. Cho một điểm A nằm trong góc $\widehat{xPy}$. Hãy dựng đường thẳng đi qua A cắt hai cạnh của góc tại B và C sao cho A là trung điểm BC.

Bài tập tự giải

Bài 71. Cho 4 đường thẳng a, b, c, d từng đôi một không song song với nhau và điểm I. Hãy dựng một hình bình hành tâm I có 4 đỉnh nằm trên 4 đường thẳng đã cho.

Bài 72. Cho hai đường tròn đồng tâm Q và một điểm A nằm trên đường tròn nhỏ. Dựng đường thẳng đi qua A cắt hai đường tròn tại B,C và D. (B $\in$ vòng tròn nhỏ) sao cho AB chia CD thành ba phần bằng nhau.

Bài 73*. Cho hai đường tròn và một điểm E. Hãy tìm trên mỗi đường tròn hai điểm sao cho bốn điểm đó tạo thành hình bình hành nhận E làm trung điểm.

Bài 74*. Cho một tam giác, một lục giác và một điểm E. Hãy dựng hình bình hành tâm E có hai đỉnh nằm trên một cạnh tam giác còn hai đỉnh kia nằm trên các cạnh lục giác.

Bài 75. Cho một lục giác ABCDEF ngoại tiếp một đường tròn và có các cặp cạnh đối song song với nhau. Chứng minh rằng:

a) Từng cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Hai tam giác ACE và BDF có diện tích bằng nhau.

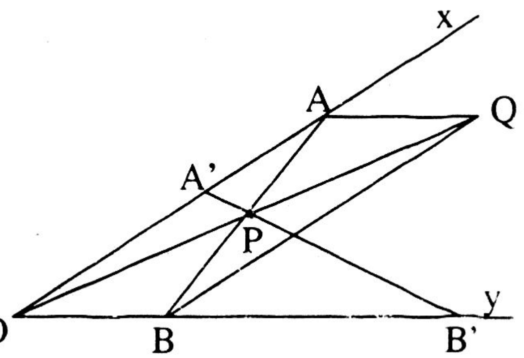
III. Hướng dẫn giải - Đáp số

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
a	**c**	**b**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**a**	**b**

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 61.



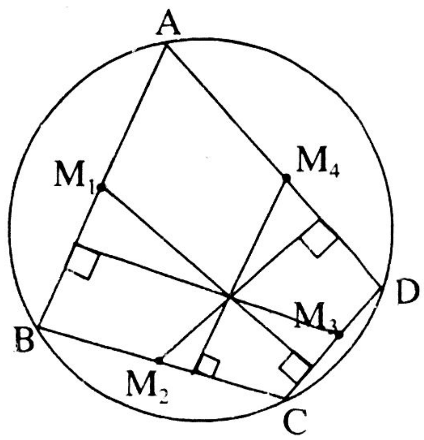
Lấy Q đối xứng với O qua P

Vẽ $\left.\begin{matrix} QA // Oy \\ OB // Ox \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ AB cần dựng.

Thật vậy: Vẽ A'B' qua P bất kỳ ta thấy A'B' có điểm ngoài tam giác ABO. Giả sử B' ở ngoài tam giác ABO

$\Rightarrow S_{\Delta PBB'} > S_{\Delta PA'A} \Rightarrow S_{\Delta A'OB'} > S_{\Delta ABO}$.

Bài 62.



Gọi giao điểm của $M_1M_4 \times M_2M_3 = G$.

$M_1M_2M_3M_4$ là hình bình hành.

Gọi O' là đối xứng của O qua G

$Đ_G : (O) \rightarrow O'$

$M_1 \rightarrow M_4$

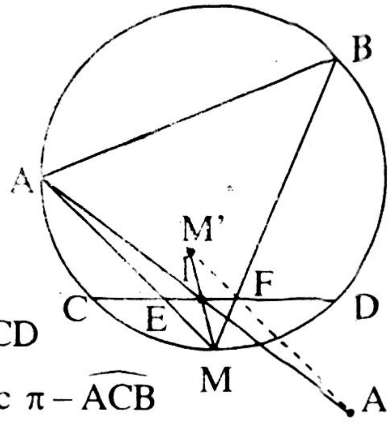
$OM_1 \rightarrow O'I_1 \equiv O'M_4$

(Vì $OM_1 \perp AB \Rightarrow O'I_1 // OM_1 \Rightarrow OI_1 \perp AB$)

Tương tự: $\left.\begin{matrix} Đ_G : (O) \rightarrow O' \\ M_2 \rightarrow M_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'M_3I_2 \perp BC$

Vậy các đường M_4I_1, M_3I_2, M_2I_4, M_1I_3 đồng quy tại O' với $O' = Đ_G : (O)$.

Bài 63.



Giả sử M dựng được.

Xét: $Đ_I : E \rightarrow F$

$A \rightarrow A'$

$M \rightarrow M'$

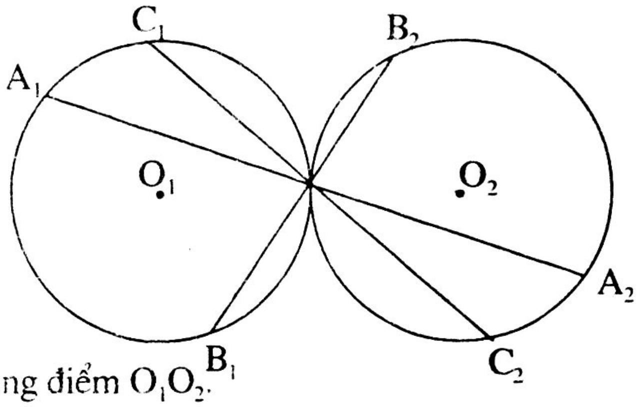
$\Rightarrow \widehat{M'FB} = \widehat{AMB} = \widehat{ACB}$

Vậy: $\widehat{A'FB} = \pi - \widehat{ACB}$ hoặc bằng $\widehat{ACB} \Rightarrow F' \in CD$

F' $\in$ cung chứa góc nhìn A'B dưới góc $\widehat{ACB}$ hoặc $\pi - \widehat{ACB}$

Tìm $F \rightarrow Đ_I(F) = E$.

Bài 64.



Xét: $Đ_M(O_1, R) \to (O_2, R)$

$A_1 \to A_2$

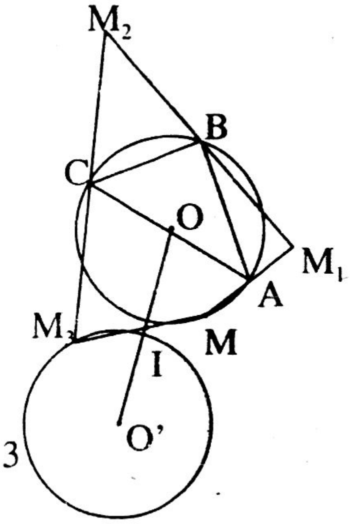
$B_1 \to B_2$

$C_1 \to C_2$

Vậy: $\Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A_2B_2C_2$

$O_1 \to O_2$ nên M là trung điểm O_1O_2.

Bài 65.



Gọi I là trung điểm MM_3 ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$.

Vậy I cố định.

Xét $Đ_I(M) \to M_3$

Nên: $M_3 \in Đ_I(O, R)$.

Bài 66.

Ta thấy rằng đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Các tiếp tuyến có 3 cặp với nhau, vậy 3 đường đó là 3 đường cần dựng.

Bài 67*.

ABCD có tâm I đối xứng

$$\begin{matrix} Đ_I: A \to C \\ A \to D \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} IA = IC \\ IB = ID \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD hình bình hành.}$$

AIC, BID thẳng hàng.

Bài 68.

Tâm đối xứng cần tìm giao điểm của 2 đường thẳng song song cách đều hai cặp

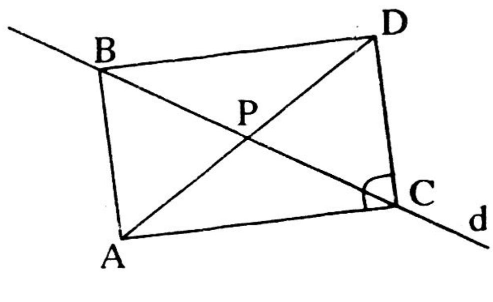
1) $y = 3x + 1$ và $y = 3x - 3$

2) $y = -x + 6$ và $y = -x$

Hai đường đó là: $y = 3x - 1$ và $y = -x + 3$.

$$I\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow I(1, 2)$$

Bài 69.



Giả sử ΔABC dựng được

Xét: $Đ_P: A \to D$

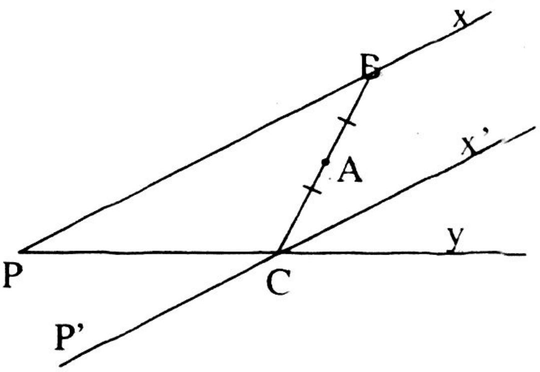
$B \to C$

nên A cố định, D cố định.

Vậy: $\widehat{DCA} = 180^0 - \widehat{A} = 180^0 - \alpha$ nên $C \in d$.

$C \in$ cung chứa góc nhìn đoạn AD.

Bài 70.



Dùng phép đối xứng tâm A

$Đ_A : Px \to P'x'$

$B \to C$

Vậy: $C = P'x' \cap Py$

$B = Đ_A(C)$

Bài 71.

Dùng phép đối xứng tâm I:

$Đ_I : a \to a'$

$b \to b'$

$a' \times c = D; \quad b' \times d = C \Rightarrow Đ_I(D) = A; Đ_I(C) = B$

Tứ giác ABCD là hình bình hành cần dựng.

Bài 72.

Xét phép đối xứng tâm A biến đường tròn nhỏ tâm Q thành (Q') và (Q') cắt đường tròn lớn tâm (Q) tại C. Đường AC cắt đường tròn lớn tại D, đường CAD cần dựng.

Bài 73*.

Gợi ý: Dùng phép đối xứng tâm E biến (O_1) thành (O_1') sau đó tìm giao $(O_1') \times (O_2)$ tạo thành AB.

Lấy $Đ_E : A \to D$

$B \to C$

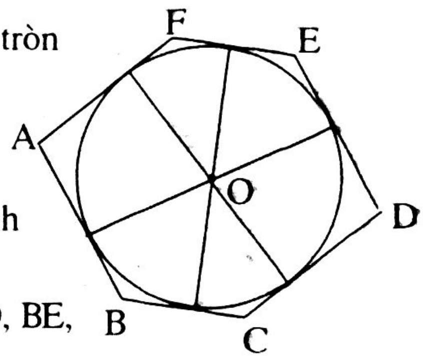
thì 4 điểm ABCD cần tìm.

Chú ý: xét các trường hợp đặc biệt của hai đường tròn

Bài 74*.

Giải tương tự bài 73.

Bài 75.



Gọi tâm (O) xét phép: $Đ_O : (ABCDEF)$ thành chính nó. Nên các cặp cạnh đối là hình bình hành.

Vậy cặp cạnh bằng nhau nên O là trung điểm AD, BE, CF.

Các diện tích tam giác:

$S_{\Delta AOE} = S_{\Delta EOD}$

$S_{\Delta AOC} = S_{\Delta COD}$

$S_{\Delta OCE} = S_{\Delta BOC} \Rightarrow S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} ABCDEF.$

PHẦN 4 . PHÉP QUAY

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa: Cho điểm I và góc lượng giác α. Phép biến hình biến một điểm M thành một điểm M' thoả mản: $\begin{cases} IM = IM' \\ (IM, IM') = \alpha \end{cases}$ được gọi là phép quay tâm I góc quay α.

Kí hiệu: $Q_I^\alpha : M \to M'$.

II. Tính chất

Phép quay tâm I góc quay α

a) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm:

$Q_I^\alpha : A \to A'$, $B \to B'$ thì $AB = A'B'$

b) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và theo thứ tự giữa các điểm tương ứng.

$Q_I^\alpha : A, B, C \to A', B', C'$.

$AC = AB + BC = A'B' + B'C' = A'C'$

c) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

d) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

e) Biến một đường tròn thành một đường tròn có tâm là ảnh của tâm đường tròn cho trước và có bán kính bằng bán kính đường tròn cho trước.

Chú ý: $Q_I^\alpha : d \to d'$ Thì khi đó

- Nếu $\alpha < \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α nghĩa là: $(d, d') = \alpha$.
- Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$ nghĩa là $(d, d') = (\pi - \alpha)$.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Bài tập lý thuyết

Bài 76. Chứng minh tích hai phép đối xứng trục cắt nhau là một phép quay có tâm quay là giao của hai trục, góc quay bằng hai lần góc của hai trục.

Ghi chú: Thế nào là tích của hai phép biến hình

Cho 2 phép biến hình: $f : P \to P$ và $g : P \to P$. Gọi M điểm bất kì, thực hiện liên tiếp

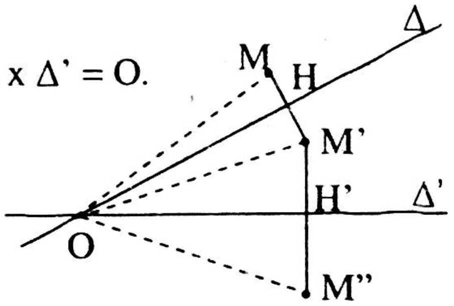
$f : M \to M'$

$g : M' \to M''$.

thì phép biến hình: $h: P \to P; h: M \to M''$ gọi là tích hai phép biến hình f và g. Kí hiệu g. f. Như vậy $g.f(M) \to M'' = g(M') = g\left[f(M)\right]$.

Vậy tích g. f là kết quả thực hiện liên tiếp hai phép biến hình. Phép thứ nhất là f và phép thứ hai là g. Nói chung g. f và tích f.g là hai phép biến hình khác nhau.

<u>*Giải*</u>



Giả sử cho hai phép đối xứng trục Δ,Δ' và Δ x Δ' = O.

Xét $\text{Đ}_{\Delta'}.\text{Đ}_{\Delta}$ với $M \neq 0$ có:

$\text{Đ}_{\Delta}(M) \to M'$

(theo hình vẽ)

$\text{Đ}_{\Delta'}(M') \to M''$

Ta có: $(\widehat{OM, OM'}) = 2(\widehat{OH, OM'})$

$(\widehat{OM', OM''}) = 2(\widehat{OM', OH'})$

mà $(\widehat{\Delta, \Delta'}) = (\alpha + k\pi) \Rightarrow (\widehat{OM', OM''}) = 2(\widehat{OH', OH''}) = 2(\widehat{\Delta, \Delta'})$ (1)

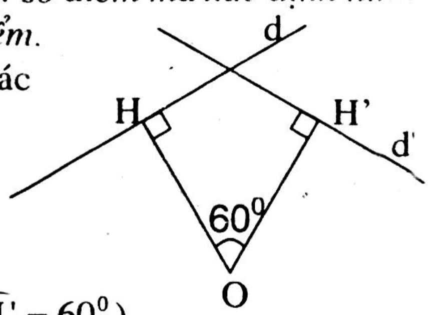
Ngoài ra ta thấy $OM = OM' = OM''$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy M biến thành M" qua phép $Q_O^{2(\Delta,\Delta')}$. Nếu $M \equiv O$ thì $\text{Đ}_{\Delta'}.\text{Đ}_{\Delta}(O) \equiv O$.

Kết luận tích hai phép đối xứng trục là một phép quay có tâm quay là giao của hai trục, góc quay bằng hai lần góc của hai trục.

Dạng 2: Xác định ảnh của hình qua phép quay.

Phương pháp chung: *Xác định ảnh của một số điểm mà xác định hình → xác định ảnh của hình qua các ảnh của các điểm.*



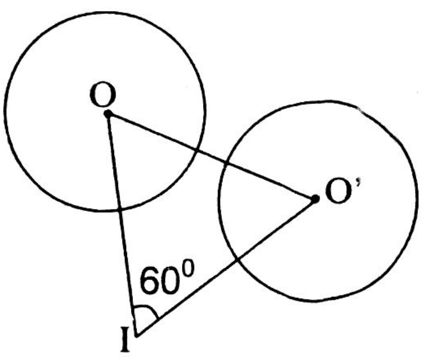
Bài 77. Cho đường d và điểm O. Hãy xác định ảnh của d qua $Q_O^{60^0}$.

<u>*Giải*</u>

Từ O kẻ $OH \perp d$. Tìm $H' = Q_O^{60^0}(H)$

(tìm H' bằng cách dựng Δ đều OHH', $\widehat{HOH'} = 60^0$)

Kẻ $d' \perp OH'$ Khi đó $d' = Q_O^{60^0}(d)$



Bài 78. Cho đường tròn (O, R) và điểm I. Tìm ảnh của đường tròn (O, R) qua phép quay tâm I góc quay 60^0.

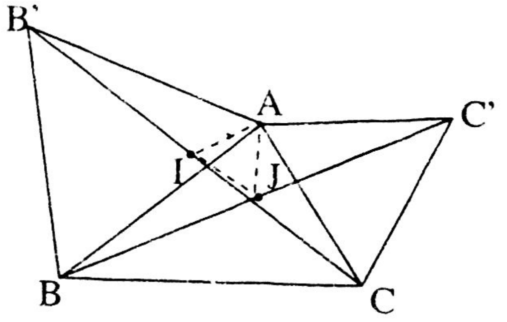
<u>*Giải*</u>

Dựng $O' = Q_I^{60^0}(O)$ bằng cách dựng ΔOIO' đều.

Dựng $(O', R) = Q_I^{60^0}(O, R)$.

Dạng 3: Chứng minh một số tính chất của một hình và giải một số bài toán hình học.

Bài 79. Cho ΔABC, vẽ phía ngoài tam giác các tam giác đều: $\Delta ABB'$, $\Delta ACC'$. Gọi I, J lần lượt trung điểm của B'C và C'B. Chứng minh rằng ba điểm AIJ hoặc trùng nhau hoặc ΔAIJ đều.



Giải

Xét: $Q_I^{60^0}: B' \to B$

$C \to C'$

$\Rightarrow B'C \to BC'$

Vậy $I \to J$

Nếu I không trùng với A thì ΔAIJ đều.

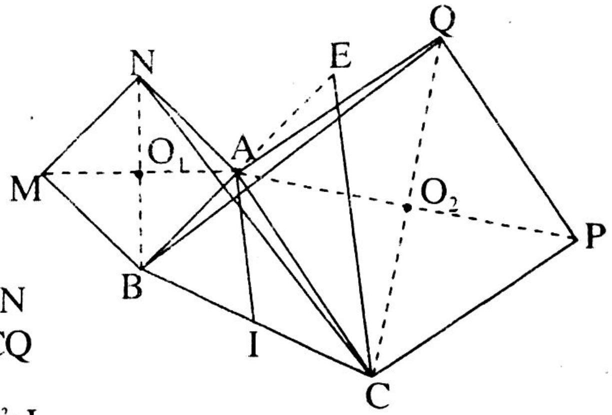
Trường hợp trùng khi ΔABC cân và $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Bài 80. Cho ΔABC, dựng phía ngoài tam giác các hình vuông ABMN và ACPQ. Gọi I là trung điểm của BC; O_1, O_2 lần lượt tâm của hình vuông ABMN và ACPQ.

a) Chứng minh IO_1O_2 là tam giác vuông cân tại I.

b) AI vuông góc với NQ và $AI = \frac{1}{2}NQ$.

Giải



a) Xét : $Q_A^{\pi/2}: N \to B$

$C \to Q$

$\Rightarrow \begin{cases} NC = BQ \\ NC \perp BQ \end{cases}$

Nếu O_1I là đường trung bình ΔBCN

O_2I là đường trung bình ΔBCQ

$\Rightarrow \begin{cases} O_1I \perp O_2I \\ O_1I = O_2I \end{cases} \Rightarrow \Delta IO_1O_2$ vuông ở I.

b) Xét $Q_A^{\pi/2}: E \to N$

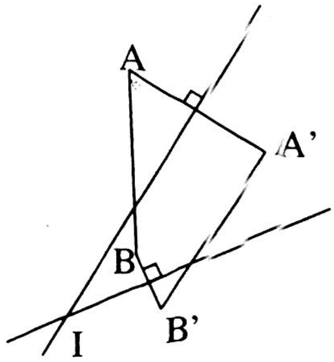
$C \to Q$

Khi đó AB = AE.

$EC \to NQ \Rightarrow \begin{cases} EC = NQ \\ EC \perp NQ \end{cases}$

mà AI là đường trung bình $\Delta BCE \Leftrightarrow AI \perp NQ$ và $AI = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}NQ$ (đpcm).

Bài 81. Cho hai đoạn thẳng AB = A'B'. Hãy xác định phép quay biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'.



Giải

Xét hai đường trung trực AA' và BB' là Δ_1, Δ_2

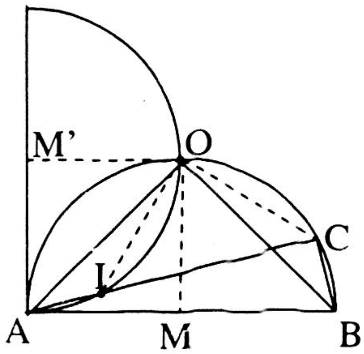
$\Delta_1 \times \Delta_2 = I$ cần tìm. Góc quay $\pi - \left(\widehat{AB, A'B'}\right)$

Vậy $\Delta IAB = \Delta IA'B'$ nên $\widehat{AIA'} = \widehat{BIB'}$. Xét $Q_A^{\widehat{AIA}}$ cần tìm.

Dạng 4: Vận dụng phép quay để dựng hình và giải bài toán quỹ tích

Bài 82. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Một điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Tìm tập hợp các điểm I trên tia AC sao cho AI = BC.

Giải



Gọi O là điểm chính giữa của cung AB.

Xét hai $\Delta OIA = \Delta OCB$

(Vì $OA = OB$; $AI = BC$; $\widehat{OAC} = \widehat{OBC}$)

nên $(\widehat{OC, OI}) = (\widehat{OB, OA}) = \pi/2$

Xét $Q_O^{\pi/2} : B \rightarrow A$

$C \rightarrow I$

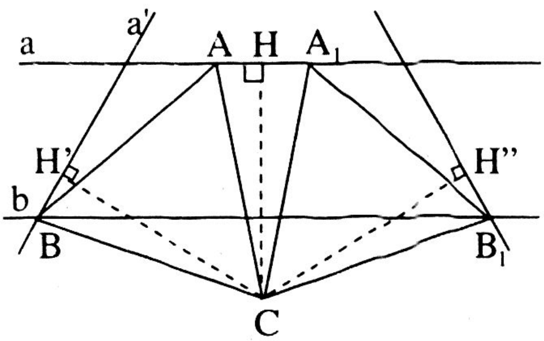
mà $C \in (IM, AB/2) \Rightarrow I \in Q_O^{\pi/2}(M, AB/2)$ là đường tròn tâm M' bán kính $AB/2$.

Bài 83. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau và điểm C không nằm trên hai đường. Tìm trên a, b lần lượt hai điểm A, B sao cho ΔABC đều.

Giải

Phân tích:

Giả sử ΔABC dựng được $A \in a$, $B \in b$. ΔABC đều



Xét $Q_C^{\pi/3} : A \rightarrow B$

mà $A \in a \Rightarrow B \in a' = Q_C^{\pi/3}(a)$ và

$b \in b \Rightarrow B = a' \times b$.

Dựng:

Dựng $a' = Q_C^{\pi/3}(a)$ bằng cách lấy $CH \perp a$.

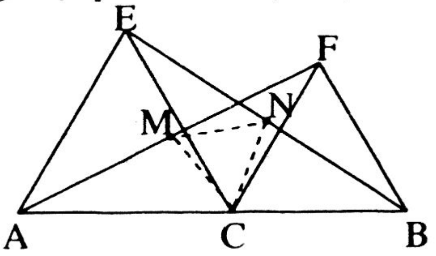
Dựng Δ đều CHH'. Tại H kẻ $a' \perp CH'$.

$a' = Q_C^{\pi/3}(a)$; $a' \times b = B \Rightarrow A = Q_C^{-\pi/3}(B) \Rightarrow \Delta ABC$ cần dựng.

Biện luận:

Bài toán có 2 nghiệm do tính chất phép quay thể hiện qua hình vẽ.

Bài 84. Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm C nằm giữa AB. Dựng các tam giác đều ΔACE, và ΔBCF sao cho E, F nằm cùng một phía AB. Gọi M, N là trung điểm của AF, BE. Chứng minh ΔMNC đều.



Giải

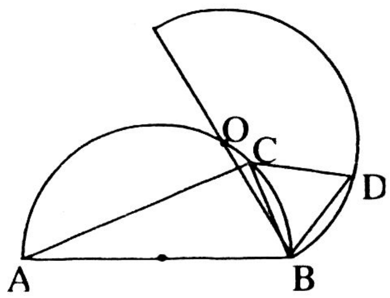
$Q_C^{\pi/3}: A \to E$

$F \to B$

nên $AF \to BE \Rightarrow M \to N$.

Vậy ΔCNM đều.

Bài 85. Cho nửa đường tròn đường kính AB, một điểm C thuộc đường tròn. Dựng phía ngoài ΔABC một ΔBCD đều. Tìm tập hợp điểm D khi C thay đổi trên nửa đường tròn.



Giải

Xét $Q_B^{\pi/3}: C \to D$

Vậy C thuộc nửa đường tròn đường kính AB thì D thuộc ảnh của nửa đường tròn ảnh qua phép quay $Q_B^{\pi/3}$.

Dựng ảnh: gọi O là tâm nửa đường tròn, dựng $\Delta BOO'$ đều $O' = Q_B^{\pi/3}(O)$.

Dựng $(O', R = AB/2)$.

II. Bài tập tự giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Cho M(2, 2). Hỏi 4 điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay 45^0.

a) $M_1(2\sqrt{2}, 0)$ b) $M_2(-2\sqrt{2}, 0)$ c) $M_3(0, 2\sqrt{2})$ d) $M_4(0, -2\sqrt{2})$.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD tâm O, có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α $(0 \le \alpha \le 2\pi)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó?

a) Có 1 b) Có 2 c) Có 3 d) Có 4.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC tâm O có bao nhiêu phép quay tâm O góc α $(0 < \alpha < 2\pi)$ biến tam giác đều ABC thành chính nó?

a) Có 1 b) Có 2 c) Có 3 d) Có 4.

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD tâm O góc $\left(0 \le \alpha \le 2\pi\right)$. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α biến hình chữ nhật ABCD thành chính nó?

a) Có 1 b) Có 2 c) Có 3 d) Không có.

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R. Có bao nhiêu phép quay tâm (O) góc quay α $\left(0 \le \alpha \le 2\pi\right)$ biến đường tròn (O) thành chính nó.

a) Có 1 b) Có 2 c) Có 3 d) Vô số.

Bài 6. Cho hai đường thẳng $x - 2y + 4 = 0$ (d) và $2x + y - 1 = 0$ (d'). Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Phép quay tâm I(0, 1) góc quay $\pi/2$ biến d thành d'.

b) Phép quay tâm I(1, 0) góc quay $-\pi/2$ biến d thành d'.

c) Phép quay tâm I(0, 1) góc quay $\pi/4$ biến d thành d'.

d) Phép quay tâm I(1, 0) góc quay $\pi/4$ biến d thành d'.

Bài 7. Cho đường thẳng d): $x + y - 1 = 0$ và I(0,1). Hỏi phép quay tâm I góc quay $\pi/2$ biến d thành đường thẳng nào có phương trình sau?

a) $x - y + 1 = 0$ b) $x + y + 1 = 0$ c) $x - y + 3 = 0$ d) $x + y - 2 = 0$

Bài 8. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ (C) và phép quay tâm (O) góc quay $\pi/2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn nào sau .

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$.

Bài 9. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

a) Phép quay Q_I^α biến đường tròn thành một đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn cho trước và có tâm là ảnh của tâm đường tròn cho trước.

b) Phép quay Q_I^α biến đường thẳng thành đường thẳng.

c) Phép quay Q_I^α biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn theo thứ tự.

d) Phép quay Q_I^α biến hình vuông thành hình vuông.

Bài 10. Cho đường thẳng $x + y - 1 = 0$, phép quay tâm O góc quay $-\pi/2$ biến đường thẳng đó thành đường thẳng nào sau đây?

a) $x - y + 1 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$

c) $-x - y + 1 = 0$ d) $x + y + 1 = 0$.

Phần 2. Bài tập tự luyện

Dạng 1: Dựng ảnh của hình qua phép quay

Bài 86. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho M(3, 4). Hãy tìm M' là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc 30^0.

Bài 87. Cho đường tròn (C) có phương trình: $(x+3)^2 + y^2 = 9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') qua phép quay tâm (O) góc toạ độ, góc quay $-\pi/2$.

Bài 88. Cho hai điểm A', B' là ảnh tương ứng của hai điểm A, B qua phép quay. AB cắt A'B' tại K. Chứng minh tâm quay là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn (AA'K), (BB'K).

Bài 89. Cho ba điểm $A(3,-2); B(0,4); C(-5,-1)$. Hãy tìm ảnh của ba điểm A, B, C qua phép quay tâm góc toạ độ, góc quay $-\pi/4$.

Bài 90. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Lấy điểm C trên nửa đường tròn, dựng phía ngoài ΔABC hình vuông BCEF. Tìm quỹ tích F khi C thay đổi trên nửa đường tròn.

Bài 91. Cho tam giác đều ABC, một điểm M thuộc trong tam giác. Chứng minh rằng:

$|MB - MC| < MA < MB + MC$.

Bài 92. Cho hình bình hành ABCD, dựng tam giác đều ABE và ADF sao cho đỉnh E nằm cùng phía điểm C đối với đường AB, điểm F cùng phía điểm C đối với AD. Chứng minh CEF là tam giác đều.

Dạng 2: Dựng hình và bài toán quỹ tích

Bài 93. Dựng tam giác cân ABC sao cho đỉnh B thuộc đường thẳng d và đỉnh C thuộc đường tròn (O, R), góc ở đỉnh A: $\widehat{BAC} = 40^0$. Đỉnh A đã cho không thuộc hai đường trên.

Bài 94. Dựng một hình vuông thoả mản điều kiện. Cho ba điểm không thẳng hàng trong đó có một điểm là tâm còn hai điểm kia thuộc hai cạnh liên tiếp.

Bài 95. Cho $d_1 // d_2 // d_3$. Hãy dựng tam giác đều ABC với $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$.

Bài 96. Dựng một hình vuông thoả mản điều kiện: Cho ba điểm không thẳng hàng trong đó có một điểm là đỉnh hình vuông, còn hai điểm kia thuộc hai cạnh hình vuông không đi qua đỉnh đó.

Bài 97. Từ các cạnh ΔABC dựng các tam giác BCA_1, ACB_1, ABC_1 đều. Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài 98*. Dựng phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ABO_1, ACO_2 tại O_1 và O_2. Gọi O là trung điểm của BC. Chứng minh $OO_1 \perp OO_2$ và $OO_1 = OO_2$.

Bài 99*. Dựng phía ngoài tam giác ABC các hình vuông có cạnh AB, BC, AC. Gọi tâm các hình vuông là O_1, O_2, O_3.

a) Chứng minh: $O_1O_3 = AO_2$; $O_1O_3 \perp AO_2$.

b) Chứng minh 4 trung điểm các đoạn AB, AO_2, AC, O_1O_3 là đỉnh hình vuông.

c) Chứng minh $\Delta BO_2O_3 = \Delta CO_1O_2$.

Bài 100. Từ các cạnh tam giác đều dựng phía ngoài tam giác các hình vuông. Chứng minh tâm các hình vuông là đỉnh tam giác đều.

Bài 101. Trên đường tròn (O, R) cho A cố định và điểm B thay đổi. Gọi M là trung điểm dây AB.

a) Lấy trên tia MB một điểm I thoả mản OI = 2OM. Tìm tập hợp điểm I.

b) Tìm quỹ tích E và F lấy trên Ox//AB và OE = OF = OI.

Bài 102. Cho đường thẳng d và điểm A ở ngoài đường thẳng, một điểm $B \in d$, dựng ΔABC đều. Tìm tập hợp điểm C khi B thay đổi trên d.

Bài 103. Cho đường tròn đường kính AB, một điểm C thuộc đường tròn. dựng phía ngoài ΔABC hình vuông BCDE. Tìm tập hợp E.

Bài 104. Cho ba đường tròn đồng tâm (C_1), (C_2), (C_3). Dựng một tam giác đều có 3 đỉnh nằm trên ba đường tròn.

Bài 105. Dựng ΔABC biết 3 đỉnh 3 tâm hình vuông dựng phía ngoài tam giác và cạnh là cạnh hình tam giác.

Bài tập tự làm

Bài 106. Cho tam giác ABC. Tìm M nằm trong ΔABC sao cho MA + MB + MC bé nhất.

Bài 107. Từ các cạnh một hình bình hành dựng phía ngoài hình bình hành 4 hình vuông. Chứng minh rằng 4 tâm hình vuông vừa dựng là 4 đỉnh hình vuông.

Bài 108. Cho góc $\widehat{xOy} = 1v$, trên phân giác góc vuông lấy một điểm A cố định. Đường tròn đi qua A và O cắt Ox ở M, cắt Oy ở N. Chứng minh OM + ON = hằng số.

Bài 109. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau và một điểm G không nằm trên chúng. Hãy xác định tam giác đều ABC mà $A \in a$, $B \in b$, G là trọng tâm tam giác.

Bài 110. Cho đường tròn (O, R), một điểm A cố định thuộc đường tròn, một điểm M di động trên đường tròn, gọi I là trung điểm của AM. Tìm tập hợp điểm K của tam giác đều OIK.

Bài 111. Cho hình vuông ABCD; M, N lần lượt thuộc BC, CD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B lên AM, AN, gọi I, J lần lượt là hình chiếu của D lên AM, AN, gọi O là tâm của hình vuông. Xét phép quay: $Q_O^{90^0}$.

a) Chứng minh ΔBAF có ảnh là ΔADJ.

b) Xác định ảnh của ΔBAE.

c) Chứng minh $EF \perp IJ$.

Bài 112. Cho ΔABC đều, điểm M nằm trong tam giác sao cho $MC^2 = MB^2 + MA^2$. Tính góc $\widehat{BMA} = ?$

Bài 113. Trên các cạnh AB, CD của hình bình hành ABCD về phía ngoài người ta dựng các tam giác đều ABE, CDF còn trên AD, BC phía ngoài dựng các hình vuông có tâm là G, H.

Chứng minh tứ giác EGFH là hình bình hành.

III. Hướng dẫn giải - đáp số

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
c	b	a	d	d		a	a	d	b

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 86.

Bài toán tổng quát. Tìm ảnh M(x, y) qua phép Q_O^α (Phép quay tâm O góc quay α).

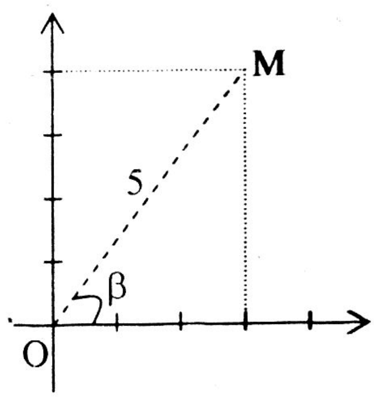
Đặt OM = a

Gọi $M' = Q_{(O)}^\alpha(M)$

$M'(x', y')$

Gọi $\beta = (Ox, OM)$

Ta có: $(OM, OM') = \alpha$



$$\begin{cases} x = a\cos\beta \\ y = a\sin\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = a\cos(\alpha+\beta) \\ y' = a\sin(\alpha+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ y' = a(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

(Đây chính là biểu thức toạ độ tìm ảnh của một điểm qua phép quay tâm O góc quay α.)

Áp dụng: Tâm O góc quay 30^0.

$$M(3,4) \Rightarrow M' = Q_O^{30^0}(M) = \begin{cases} x' = 3\cos 30^0 - 4\sin 30^0 \\ y' = 3\sin 30^0 + 4\cos 30^0 \end{cases}$$

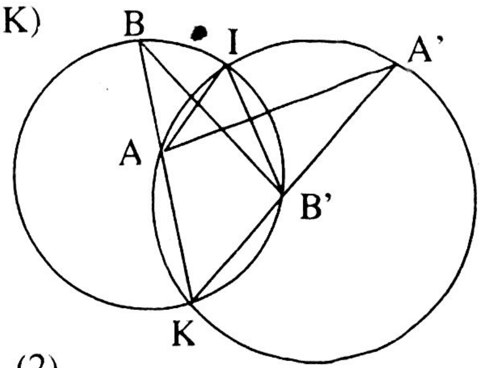
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = {}^{3\sqrt{3}}\!/_{2} - 2 \\ y' = {}^{3}\!/_{2} + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M'\left({}^{3\sqrt{3}}\!/_{2} - 2, {}^{3}\!/_{2} + 2\sqrt{3}\right).$$

Bài 87.

Đường tròn (C) có tâm $I(-3,0)$ bán kính $R = 3$. $Q_O^{-\pi/2} : (I) \rightarrow I'(0,3)$ vậy (C') có phương trình: $x^2 + (y-3)^2 = 9$.

Bài 88.



Gọi góc $\widehat{AKA'} = \alpha$.

Xét I giao hai đường tròn (AA'K) và (BB'K)

$\widehat{AIA'} = \widehat{BIB'} = \pi - \widehat{AIA'} = \pi - \alpha$

Xét ΔIBA và Δ IB'A'

Ta có: $\widehat{BIA} = \widehat{B'IA'}$ (1)

Vì ($\widehat{BIA} + \widehat{AIB'} = \widehat{AIB'} + \widehat{B'IA'}$

$$\begin{cases} \widehat{BAI} = \dfrac{Sđ\widehat{AI} + Sđ\widehat{AK}}{2} \\ \widehat{IA'B'} = \dfrac{Sđ\widehat{AI} + Sđ\widehat{AK}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{BAI} = \widehat{IA'B'} \ (2)$$

Và ta có: AB = A'B' (3)

Nên từ (1), (2) và (3) ta có: ΔIBA = ΔIB'A' $\Leftrightarrow IB = IB'; IA = IA'$.

Vậy: $Q_I^{\pi-\alpha} : A \rightarrow A'$

$B \rightarrow B'$.

Bài 89.

Theo công thức bài 86: $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\beta \end{cases}$

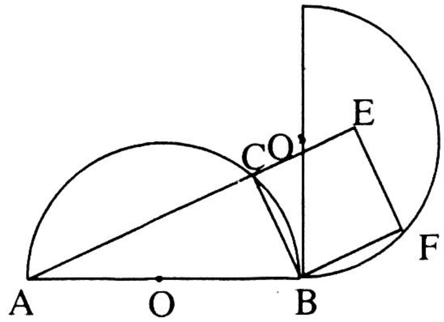
$$A(3,-2) \rightarrow A' \begin{cases} x' = 3\cos\left(-{}^{\pi}\!/_{4}\right) + 2\sin\left(-{}^{\pi}\!/_{4}\right) \\ y = 3\sin\left(-{}^{\pi}\!/_{4}\right) + (-2)\cos\left(-{}^{\pi}\!/_{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A'\begin{cases} x' = 3.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ y' = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow A'\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \dfrac{-5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy: $A'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$

Tương tự $B'\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$; $C'\left(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Bài 90.

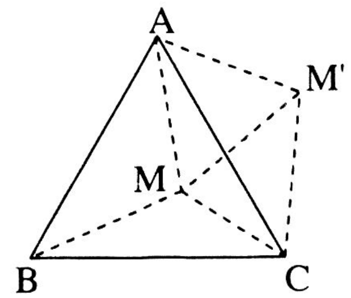


Xét: $Q_B^{-\pi/2} : C \to F$

Vậy $C \in$ nửa đường tròn đường kính AB. Vậy F thuộc ảnh của nửa đường tròn đường kính qua phép $Q_B^{-\pi/2}$. Dựng ảnh nửa đường tròn (O) đường kính AB.

$O' = Q_B^{-\pi/2}(O)$.

Bài 91.



$Q_A^{60^0} : B \to C$

$\quad M \to M'$

BM = CM'

Xét $\Delta CMM'$

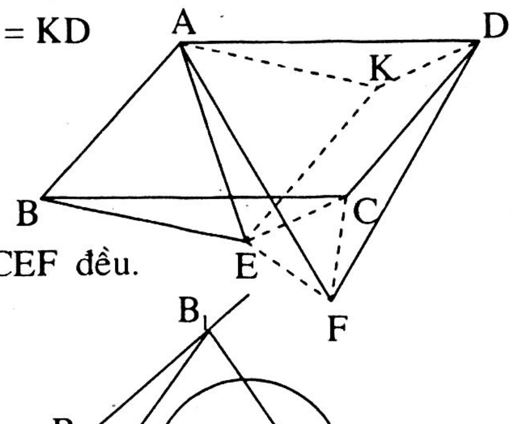
$MC - MB = MC - M'C < MM' < MC + M'C$

$\Leftrightarrow |MC - MB| < MM' = AM < MC + MB$ (đpcm).

Bài 92.

Vẽ hình bình hành ABEK (là hình thoi) và $(\widehat{AB, AE}) = (\widehat{AE, AK})$

EK = CD và EK // CD; EC // KD $\Rightarrow$ EC = KD



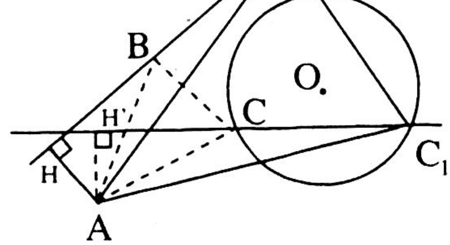
Xét $Q_A^{60^0} : E \to K$

$\quad F \to D$

$\Rightarrow EF = KD; \quad (\widehat{EF, KD}) = 60^0$

Vậy $EF = KD$; và $(\widehat{EF, KD}) = 60^0 \Rightarrow \Delta CEF$ đều.

Bài 93.



<u>Phân tích:</u>

Xét $Q_A^{-40^0} : B \to C$

Mà $B \in d \Rightarrow C \in Q_A^{-40^0}(d)$

và $C \in (O, R)$ nên $C = d' \times (O, R)$

Dựng:

Dựng: $d' = Q_A^{-40^0}(d)$.

Lấy: $d' \times (O,R) = C$.

Dựng: $Q_A^{-40^0}(C) = B$.

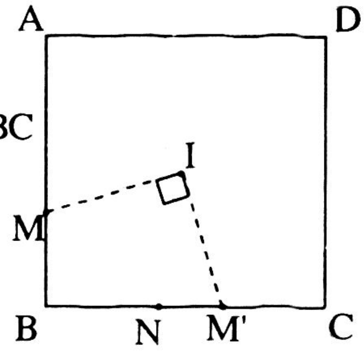
Bài toán có nghiệm khi $d' \times (O,R)$ thường có hai tam giác.

Bài 94.

Giả sử cho 3 điểm M, N, I với I là tâm hình vuông $M \in AB$, $N \in BC$.

Phân tích

Giả sử ABCD hình vuông cần dựng:



Xét: $Q_I^{90^0}: A \to B$

$B \to C$

Vậy $AB \to BC$ mà $M \in AB \Rightarrow M' = Q_I^{90^0}(M) \in BC$

Vậy cách dựng BC (đi qua N và M').

Cách dựng:

$Q_I^{90^0}(M) \to M'$.

Dựng BC đi qua M'N.

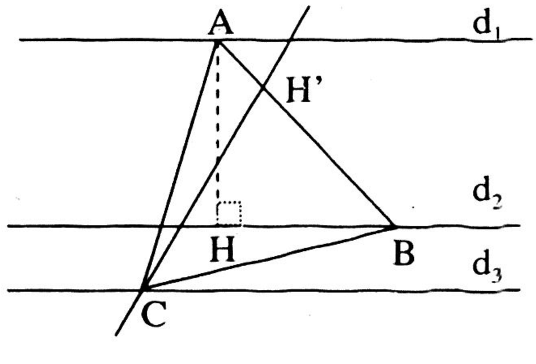
Dựng $BM \perp M'N$.

Dựng BI = ID qua I kẻ $Ix \perp BD$, $Ix \times MB = A$; $Ix \times BC = C$.

Hình vuông ABCD cần dựng.

Bài toán thường có 2 nghiệm

Xét: $Q_I^{-90^0}$ và $Q_I^{90^0}$.



Bài 95.

Hướng dẫn

Lấy A bất kì, $A \in d_1$.

Xét: $Q_A^{-60^0}: B \to C$

$B \in d_2 \Rightarrow C \in d_2' = Q_A^{-60}(d_2)$

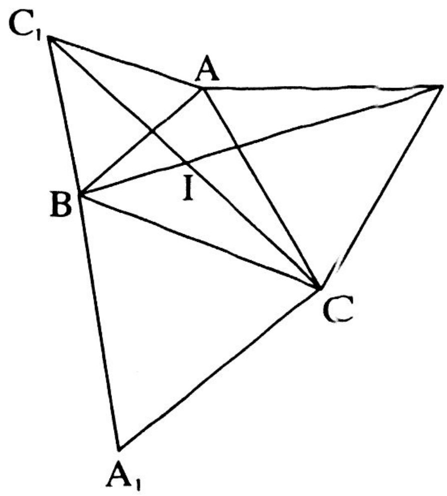
Vậy $C = d_2' \times d_3$.

Xét $Q_A^{60}: C \to B \Rightarrow \Delta ABC$ cần dựng.

Bài toán có hai họ nghiệm.

Bài 96. Tương tự bài 94.

Bài 97.



Xét $Q_A^{60^0}: C_1 \to B$

$C \to B_1$

$\Rightarrow C_1C = BB_1$

$(\widehat{BB_1, CC_1}) = 60^0$

Gọi $I = BB_1 \times CC_1$

Tứ giác $BIAC_1$ nội tiếp nên $\widehat{AIC_1} = 60^0$

Xét: $Q_B^{60^0} : A \to C_1$

$A_1 \to C$

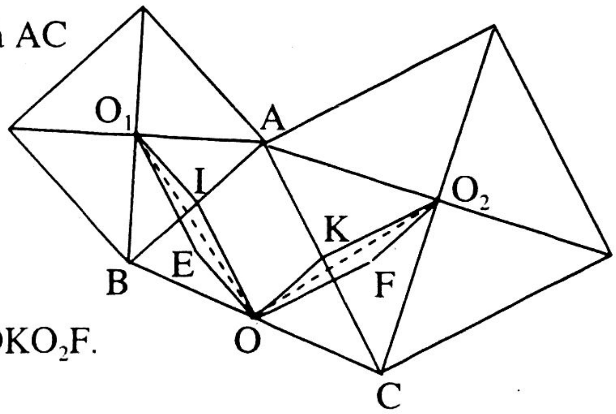
nên $AA_1 \to C_1C \Rightarrow AA_1 = CC_1$

$(\widehat{AA_1, CC_1}) = 60^0 \Rightarrow A, I, A_1$ thẳng hàng, hay AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài 98.

Cách 1: Vận dụng bài 80.

Cách 2: gọi I, K trung điểm AB và AC



$O_1I = \frac{1}{2}AB = OK$

$O_2K = \frac{1}{2}AC = OI$

$O_2K \perp OI$

Dựng hình bình hành: OIO_1E và OKO_2F.

Ta có: $OE \perp OK$ và $OE = OK$

$OI \perp OF$ và $OI = OF$

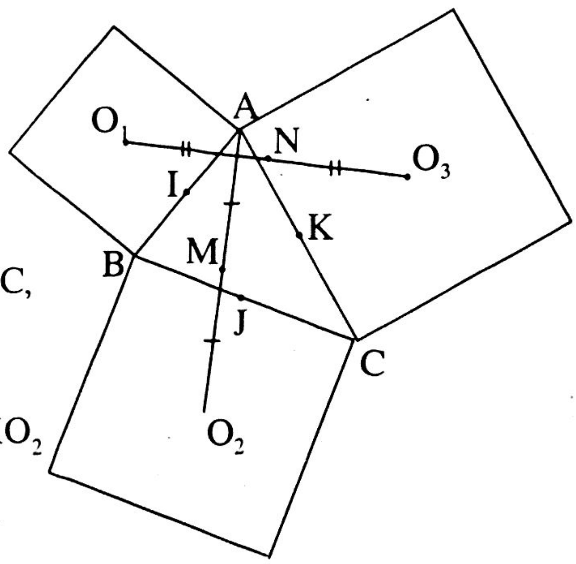
Xét: $Q_O^{90^0} : E \to K$

$I \to F$

$\Rightarrow OIO_1E \to OFO_2K$

Vậy $OO_1 \perp OO_2$ và $OO_1 = OO_2$.

Bài 99.



a) Gọi các trung điểm các cạnh AB, BC, AC là I, J, K.

Xét phép quay: Q_K^{90}

(Theo bài 98): $KO_1 \perp KO_2$; $KO_1 = KO_2$

$Q_K^{90^0} : O_3 \to A$

$O_1 \to O_2$

$O_3O_1 = AO_2$; $O_3O_1 \perp AO_2$ (đpcm).

b) Chứng minh 4 trung điểm AB, AO_2, AC, O_1O_3 là 4 đỉnh hình vuông.

Thật vậy: Gọi trung điểm AO_2 là M, O_1O_3 là N. Chứng minh IMKN là hình vuông.

Xét : $\Delta ABO_2 \Rightarrow IM = \frac{1}{2}BO_2$

$\Delta ACO_2 \Rightarrow MK = \frac{1}{2}CO_2$

$\Rightarrow IM = MK = \frac{1}{2}CO_2;\quad IM \perp MK\left(CO_2 \perp BO_2\right)$

Theo câu a) $Q_K^{90^0} : N \to M \Rightarrow \begin{cases} KN = KM \\ KN \perp KM \end{cases}$

Vậy:

$IM = MK = KN$

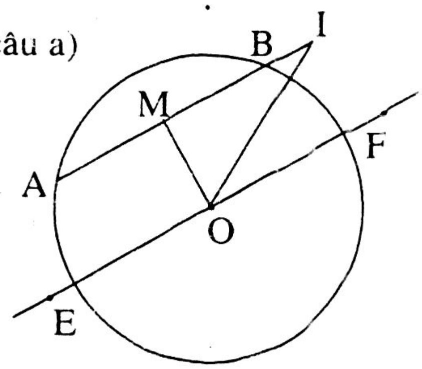
$IM \perp MK$

$KN \perp MK$

Suy ra: IMKN hình vuông.

c) Chứng minh: $\Delta BO_2O_3 = \Delta CO_1O_2$ (dựa vào câu a)

Bài 100. (Dựa vào bài 98, 99 để giải).



Bài 101.

a) Ta thấy ΔOMI vuông.

$OM = \frac{1}{2}OI \Rightarrow \widehat{AIO} = 30^0$

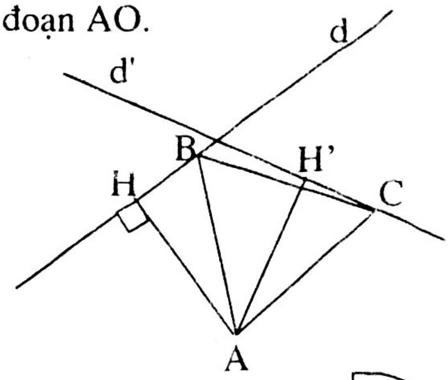
Vậy I thuộc 2 cung chứa góc 30^0 nhìn AO.

b) Xét góc $(\widehat{OI,OF}) = 30^0$

Nên $Q_O^{-30^0} : I \to F$.

Vậy F thuộc ảnh cung chứa góc 30^0 nhìn đoạn AO.

Xét: $Q_P^{150^0}$ thì $I \to E$ suy ra quỹ tích E.



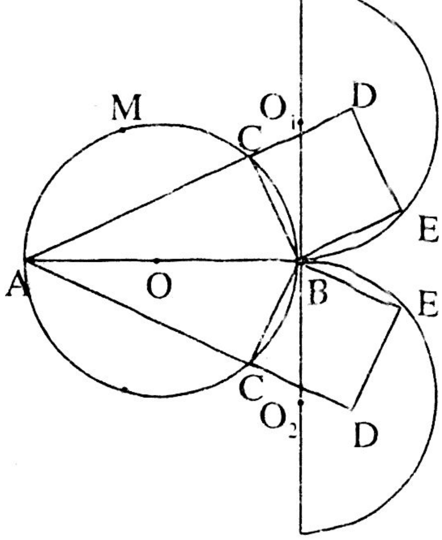
Bài 102.

Xét: $Q_A^{60^0} : B \to C$

Mà $B \in d \Rightarrow C \in Q_A^{60^0}(d)$

Hoặc xét: $Q_A^{-60^0} : B \to C$

Nên $C \in Q_A^{-60^0}\left(d\right)$.



Bài 103.

Lấy AB làm bờ với $C \in \overparen{AMB}$

Xét $Q_B^{-90^0} : C \to E$

$C \in \overparen{AMB} \Rightarrow E \in Q_B^{-90^0}(\overparen{AMB})$

$E \in \left(O_1\right)$.

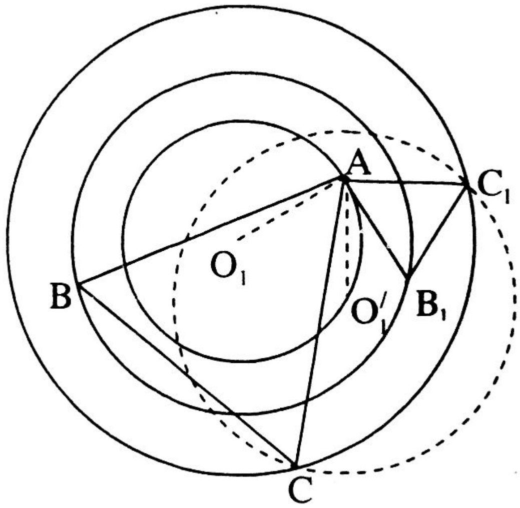
Xét $C \in \overparen{ANB}$

Xét $Q_B^{90^0}: C \to E$

Vậy $E \in (O_2)$

Kết luận quỹ tích tập E là hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2).

Bài 104.



Lấy $A \in (O_1)$; $B \in (O_2)$; $C \in (O_3)$

Giả sử ΔABC dựng được:

$Q_A^{60^0}: B \to C$

$C \in (O_3) \Rightarrow C \in Q_A^{60}(O_2)$

Vậy có thể có 2 C

$Q_A^{-60^0}: C \to B$

ΔABC cần dựng.

Bài 105.

Vận dụng bài 80 và 89, tìm được trung điểm của các cạnh $\Delta ABC \Rightarrow$ tìm được 3 trung điểm 3 cạnh $\Rightarrow$ dựng ΔABC.

Bài 106.

Xét $Q_B^{60^0}: M \to M'$

$A \to A'$

$MA + MB + MC = CM + MM' + M'A'$

Vậy $MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi $MA + MB + MC = CA'$.

Xét hai trường hợp CA' cắt AB.

Trường hợp CA' không cắt AB

Chú ý : ΔABC đều thì M giao của 3 đường cao.

Bài 107. Gợi ý: dựa vào bài số 80 và 98.

Bài 108. Gợi ý:

Dùng phép quay $Q_A^{90}: M \to N$

$O \to B$

nên $OM + ON = OB$.

Bài 109.

Giả sử ΔABC đều cần dựng được, ta có: $\widehat{AGB} = 120^0$.

Xét $Q_G^{120^0}: A \to B$

$A \in a \Rightarrow B \in Q_G^{120^0}(a) = a'$.

$B = a' \times b$

$A = Q_G^{-120^0}(B)$

Suy ra cách dựng.

Bài 110. Tìm tập hợp I đường tròn đường kính AO.

Xét: $Q_O^{60^0}: I \to K$

Nên I $\in$ đường tròn đường kính AO thì K thuộc đường tròn ảnh qua $Q_O^{60^0}$.

Bài 111.

ΔBAF và ΔADJ.

Xét: $Q_O^{90^0}: B \to A$

$A \to D$

và có: $\widehat{B} = \widehat{A} \Rightarrow Q_O^{90^0}: F \to J \Rightarrow \Delta BAF = \Delta ADJ$.

Lập luận tương tự $\Delta BAE \to \Delta ADI \Rightarrow EF \perp IJ$.

Bài 112.

Xét: $Q_A^{-60^0}: M \to M'$

$B \to C$

$\Rightarrow CM' = BM$

$MC^2 = CM'^2 + MM'^2$

Vậy: $\widehat{CM'M} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CM'A} = 150^0 \Rightarrow \widehat{BMA} = 150^0$

(Vì $Q_A^{-90^0}: (\Delta ABM) \to \Delta ACM'$)

Bài 113. Xét O là tâm hình bình hành

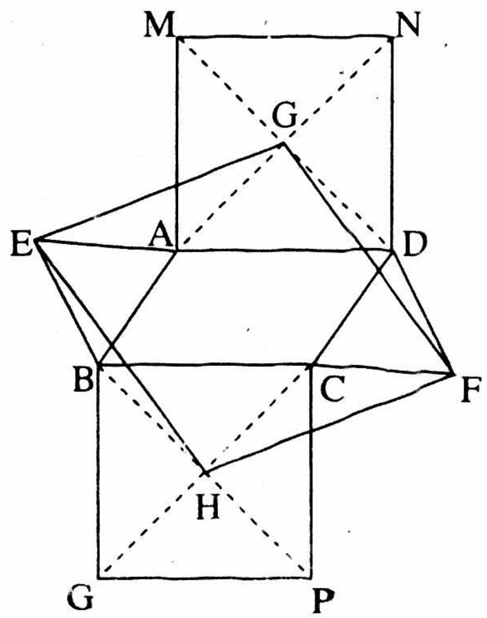
$Q_O^{180^0}: A \to C$

$B \to D$

$\Rightarrow \Delta ABE$ đều $\to BCF \Rightarrow E \xrightarrow{Q_O^{180^0}} F$

Tương tự: $G \xrightarrow{Q_O^{180^0}} H$

$\Rightarrow$ EGFH là hình bình hành.



PHẦN 5. PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa:

- Phép dời hình là một phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Hai hình bằng nhau nếu có một phép biến hình là phép dời hình biến hình này thành hình kia.
- Vậy các phép tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục, phép quay là phép dời hình.

II. Tính chất.

- Tích hai phép biến hình cho $f: P \to P$ và $g: P \to P$. Một điểm M bất kì thuộc P. Nếu $f: M \to M'$ và $g: M' \to M''$ thì phép biến hình biến $M \to M''$ gọi là tích hai phép biến hình f và g. Ký hiệu $g.f$.

$g.f(M) = M'' = g(M') = g(f(M))$

(Chú ý thực hiện liên tiếp thứ nhất là f, thứ 2 là g).

Chú ý: $g.f \neq f.g$

1) Tích hai phép dời hình là một phép dời hình.

2) Phép dời hình:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm tương ứng.

b) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

c) Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

d) Biến một đường tròn thành một đường tròn bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.

III. Hai hình bằng nhau:

- Hình H gọi bằng hình H' nếu có một phép dời hình: $f: P \to P$ biến H thành H': $f(H) = H'$.
- Nếu: H = H' và H' = H" thì H = H".

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định ảnh qua phép dời hình.

Phương pháp chung:

- *Dùng định nghĩa, tính chất của phép dời hình để xác định ảnh của phép dời hình.*

Bài 114. Cho đường thẳng $2x - y - 4 = 0$, viết phương trình d' là ảnh của phép dời hình bằng cách thực hiện liên tiếp phép biến hình:

Phép đối xứng tâm I(1, 1) và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-2, 1)$.

Giải

$x'+x=2\Rightarrow x=2-x'$

$y'+y=2\Rightarrow y=2-y'$

Nên (d') qua phép đối xứng tâm I(1, 1).

$2(2-x')-(2-y')-4=0\Leftrightarrow 2.2-2x'-2+2y'-4=0\Leftrightarrow -x'+y'-1=0$

Vậy (d') có phương trình: $x-y+1=0$.

Qua phép tịnh tiến: $\vec{v}=(-2,1)$. Theo biểu thức toạ độ $M(x,y)$ có $M'(x',y')$

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x-2\\y'=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'+2\\y=y'-1\end{cases}$$

Vậy qua phép $\vec{v}:T_{\vec{v}}:(d')\to d''$

$x'+2-y+1+1=0\Leftrightarrow(d''):x-y+4=0$.

Bài 115. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau (AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C') bao giờ cũng có một và chỉ một phép dời hình $f:P\to P$ biến: $A\to A'$; $B\to B'$; $C\to C'$.

Giải.

Giả sử A, A' là hai điểm phân biệt gọi Δ_1 là trung trực của AA'

Xét phép đối xứng trục Δ_1: $Đ_{\Delta_1}:A\to A'$

$B\to B_1$

$C\to C_1$

$\Rightarrow\Delta A'B_1C_1=\Delta A'B'C'$; $A'B_1=A'B'$.

Nếu B1, B' phân biệt Δ_2 là trung trực B_1B' và xét phép đối xứng : $Đ_{\Delta_2}:A'\to A'$

$B_1\to B'$

$C_1\to C_2$

$\Rightarrow\Delta A'B_1C_1=\Delta'B'C_2$.

Nếu C2, C' phân biệt xét trung trực C_2C' là Δ_3.

Xét phép $Đ_{\Delta_3}:A'\to A'$

$B'\to B'$

$C_2\to C'$

$\Rightarrow\Delta A'B'C_2=\Delta A'B'C'$.

Vậy $Đ_{\Delta_3}.Đ_{\Delta_2}.Đ_{\Delta_1}:\Delta ABC=\Delta A'B'C'$.

Bài 116. Cho $\vec{v} = (2,1)$ và đường thẳng $x - y - 1 = 0$ (d). **Hãy tìm ảnh của** đường thẳng d bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm **O góc quay 90^0** và phép tịnh tiến $\vec{v}$.

Giải

Theo biểu thức toạ độ phép quay tâm O góc quay α

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = y' \end{cases}$$

Vậy ta có: $d' = Q_O^{90^0}(d) : y' + x' - 1 = 0$.

Vậy d' có phương trình: $x + y - 1 = 0$.

Dùng phép tịnh tiến: $T_{\vec{v}}(d') = d''$

$$\begin{cases} x'' = x + 2 \\ y'' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'' - 2 \\ y = y'' - 1 \end{cases}$$

Vậy (d") có phương trình: $x'' - 2 + y'' - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x'' + y'' - 4 = \mathbf{0}$.

(d"): $x + y - 4 = 0$.

Kết luận: (d) qua tích hai phép biến hình:

$T_{\vec{v}}.Q_O^{90^0}(d) \to (d'') : x + y - 4 = 0$.

Bài 117. Cho hai đoạn thẳng AB và A'B'; AB = A'B'. Xác **định phép dời** hình biến A thành A', biến B thành B'

Ứng dụng giải bài toán sau:

Cho hình hình vuông ABCD có tâm I. Trên tia BC lấy E sao **cho BE = AI.**

Xác định phép dời hình biến A thành B, biến I thành E.

Dựng ảnh của hình vuông ABCD qua phép dời hình ấy.

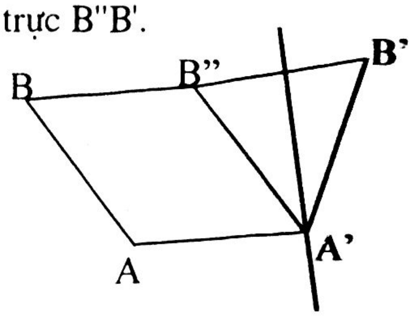
Giải

Cho AB, A'B', AB = A'B'

Dùng phép tịnh tiến $\overrightarrow{AA'}$: $T_{\overrightarrow{AA'}} : A \to A'$

$B \to B''$

Tam giác A'B"B' là Δ cân đỉnh A'. Vẽ trung trực B"B'.



Xét $Đ_\Delta : A' \to A'$

$B'' \to B'$

Vậy $Đ_\Delta.T_{\overrightarrow{AA'}} : AB \to A'B'$.

Vận dụng: AI = IB = BE.

Xét: $Đ_\Delta : A \to B$

$I \to I$

Xét $Đ_d : B \to B$

$I \to E$

Vậy $Đ_dĐ_\Delta$: $AI \to BE$.

Có thể xét phép:

$$Q_B^{-\pi/4}: \begin{array}{l} B \to B \\ I \to E \end{array} \Leftrightarrow Q_B^{-\pi/4}.Đ_\Delta : AI \to BI$$

Tìm ảnh của ABCD qua phép biến hình $Đ_d Đ_\Delta$

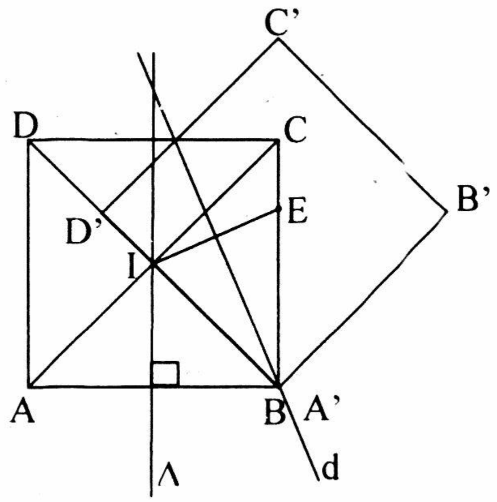
$Đ_d Đ_\Delta : A \to B = A'$

$D \to D'$

$C \to C'$

$B \to B'$

$ABCD \to A'B'C'D'$.



PHẦN 6. PHÉP VỊ TỰ

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa:

Cho điểm I cố định và số thực $k \neq 0$. Phép vị tự tâm I tỉ số k. Ký hiệu: V_I^k là phép biến hình trong mặt phẳng

$$V_I^k : P \to P$$
$$M \to M'$$

Thoả mản: $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

II. Biểu thức toạ độ phép vị tự

Trong mặt phẳng Oxy: M(x, y), I(x0, y0), M'(x', y') thì ta có: $\overrightarrow{IM'} = (x' - x_0, y' - y_0)$;

$\overrightarrow{IM} = (x - x_0, y - y_0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

III. Tính chất:

1) Phép vị tự tỉ số k giả sử AB có ảnh tương ứng A'B'

a) $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

b) $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = |k|\left|\overrightarrow{AB}\right|$

2) Phép vị tự tỉ số k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng bảo toàn thứ tự giữa các điểm tương ứng.

b) Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng cho trước. (Trường hợp trùng khi đường thẳng cho trước đi qua tâm vị tự)

c) Biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho. Tỉ số đồng dạng bằng tỉ số vị tự

d) Biến đường tròn thành một đường tròn có bán kính $r' = |k|r$ và có tâm là ảnh của tâm đường tròn cho trước.

e) Nếu $k = -1$. Phép vị tự là phép đối xứng tâm I.

B. Các dạng bài toán tự giải.

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép vị tự

Phương pháp:

– *Dùng định nghĩa, tính chất của phép vị tự xác định ảnh của các điểm đặc biệt, xác định hình H từ đó xác định hình* $H' = V_I^k(H)$.

Bài 118. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $I(2,1)$ và đường thẳng (d): $2x - y - 3 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm I tỉ số k = 2.

Giải

d'//d nên (d') có dạng: $2x - y + m = 0$. Lấy $M(0,-3) \in d$ theo biểu thức toạ độ của phép vị tự:

$$M' = V_I^2(M)\begin{cases} x' = 2.0 + (1-2)2 \\ y' = 2(-3) + (1-2)1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -7 \end{cases}$$

Vậy (d') đi qua $M'(-2,-7)$ nên $m = -(-4+7) = -3$.

(d') có phương trình: $2x - y - 3 = 0$.

Bài này có thể có cách giải lấy $M, N \in d$. Tìm $M' = V_I^2(M)$; $N' = V_I^2(N)$. Viết phương trình d' đi qua M', N'.

Bài 119. Cho đường tròn: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ (C). Hãy viết phương trình đường tròn ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm (O) góc toạ độ, tỉ số vị tự $k = -2$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(2, 1), R = 3.

Theo công thức biểu thức toạ độ thì tâm $I' = V_O^{-2}(I)$

Có toạ độ: $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2.2 + 0 \\ y' = -2.1 + 0. \end{cases} \Rightarrow I'(-4,-2)$.

Bán kính: $r' = |2|3 = 6$.

Phương trình ảnh của (C) qua V_O^{-2} là đường tròn: $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 36$.

Bài 120. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có các cặp cạnh tương ứng song song: AB//A'B', AC // A'C', BC//B'C'. Hãy xác định phép vị tự biến ΔABC thành ΔA'B'C'.

Giải

Xét phép vị tự: $f: AB \to A'B'$ (AB//A'B').

Xét $AA' \times BB' = E$.

Khi đó $f: C \to C'$ vì $f: A \to A'$

$B \to B'$

Mà AC //A'C'; BC//B'C'; AB//A'B' $\Rightarrow$ C' duy nhất.

Nếu $AA' \times BB' \times CC' = E$ phép vị tự biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ với tỷ số:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

Nếu AA', BB', CC' không cắt nhau nghĩa là **AA'//BB//CC không tồn tại** phép vị tự nào.

Dạng 2. Vận dụng phép vị tự để giải bài toán hình học

Phương pháp chung:

- *Xác định tâm, tỉ số vị tự khi biết ảnh và tạo ảnh.*
- *Cho hai hình vị tự với nhau xác định tâm và tỉ số vị tự*
- *Chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy nhờ phép vị tự.*
- *Chứng minh hai đường thẳng song song khi hình này là vị tự hình kia.*
- *Xác định đẳng thức liên hệ giữa các tỉ số, các đoạn thẳng khi qua* phép vị tự biến đoạn thẳng này thành đoạn thẳng kia.

Bài 121. Cho một điểm A trong góc xOy. Hãy dựng một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh Ox và Oy đi qua điểm A.

Giải

Giả sử (I) đi qua A tiếp xúc với Ox, Oy. Dựng thêm đường tròn (I') tiếp xúc với Ox và Oy.

Vậy (I) và (I') có tâm vị tự là O.

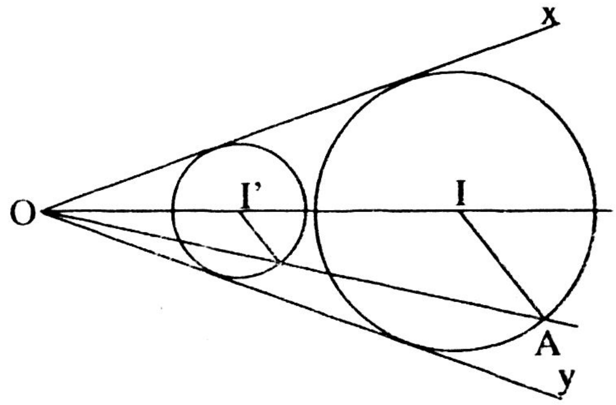
Nối OA cắt I' tại A' ta có:

$$\frac{OI}{OI'} = \frac{OA}{OA'};\ I'A'//IA$$

Vậy cách dựng: Dựng (I') tiếp xúc với Ox, Oy.

Nối OA cắt (I') tại A', nối A'I' kẻ AI//A'I', I thuộc phân giác góc $\widehat{xOy}$. Đường tròn tâm I bán kính IA cần dựng.

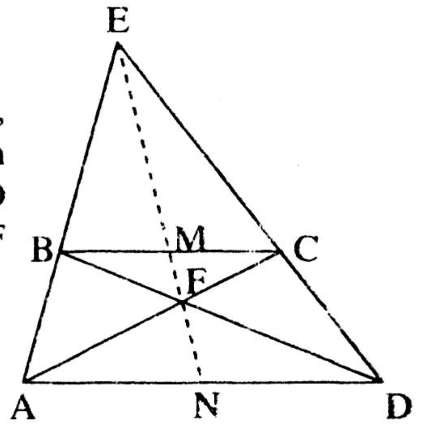
Có hai đường tròn cần dựng.



Bài 122. Cho ABCD là hình thang BC//AD, BC nhỏ hơn AD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. E, F lần lượt là giao điểm AB với CD và AC với BD. Chứng minh 4 điểm M, N, E, F thẳng hàng.

Giải

Giả sử EN cắt BC tại M'.



$$\frac{EB}{EA} = \frac{EC}{ED} = \frac{BC}{AD} = \frac{BM'}{AN} = \frac{2BM'}{AD}$$

Vậy $BM' = BC \Rightarrow M \equiv M' \Rightarrow E, M, N$ thẳng hàng.

Tương tự: M, N, F thẳng hàng.

Vậy 4 điểm EFMN thẳng hàng.

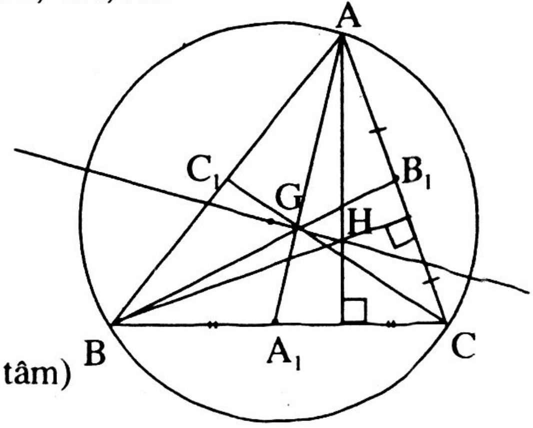
Bài 123. Chứng minh rằng trong một tam giác, trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng.

Giải

Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng thì chỉ cần chỉ ra phép vị tự có 1 trong 3 điểm là tâm. Hai điểm còn lại là ảnh và tạo ảnh qua phép vị tự.

Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp.

Xét $V_G^{-1/2}$: Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm BC, CA, AB



$V_G^{-1/2}: A \to A_1$

$\qquad B \to B_1$

$\qquad C \to C_1$

Vậy: $V_G^{-1/2}: (ABC) \to A_1B_1C_1$.

Dễ thấy O là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$, vậy.

$V_G^{-1/2}(H) = O$ (Biến trực tâm thành trực tâm)

Vậy G, O, H thẳng hàng (đpcm)

Ta có: $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}GH$.

Gọi I là tâm đường tròn $(A_1B_1C_1)$ thì $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$.

Vậy 4 điểm G, H, O, I thẳng hàng.

(Đường thẳng này gọi là đường Ơle. Đường tròn tâm I ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ gọi là đường tròn Ơle).

Bài 124. Dựng ΔABC biết góc $\widehat{BAC} = \alpha$ hai đường trung tuyến BD và CE lần lượt bằng m, n đã cho.

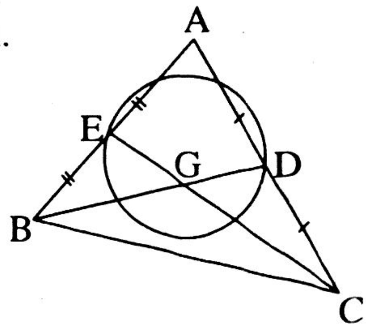
Giải

Phân tích:

Giả sử ΔABC dựng được quy về dựng ΔABD. Trong đó BD = m, $\widehat{BAD} = \alpha$, $GE = \frac{1}{3}n$. Ta thấy tìm A vì BD = m.

A thuộc hai cung nhìn BD dưới 1 góc α.

$A = V_B^2(E)$ mà $E \in \left(G, \frac{1}{3}n\right)$.



Vậy $A \in V_B^2\left(G, \frac{1}{3}n\right)$

Cách dựng:

Dựng BD = m.

Dựng cung chứa góc α nhìn BD.

Dựng đường tròn tâm $\left(G, \frac{1}{3}n\right)$ với $BG = \frac{2}{3}BD$; dựng $\left(G', \frac{2}{3}n\right)$ với $G' = V_B^2(G)$.

Lấy giao $\left(G', \frac{2}{3}n\right)$ với cung chứa góc α.

Được điểm A $\Rightarrow$ ΔABD dựng được $\Rightarrow$ Tìm C.

Bài toán thường có hai nghiệm.

Dựng C: AC = 2AD.

Bài 125. Chứng minh rằng trong một tam giác 9 điểm sau đây nằm trên đường tròn.

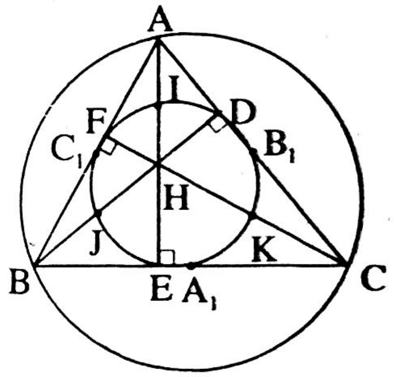
3 trung điểm các cạnh; 3 chân đường cao; 3 trung điểm 3 đoạn thẳng nối các đỉnh với trực tâm.

Giải

Gọi H là trực tâm, E, D, F là chân 3 đường cao.

A_1, B_1, C_1 là 3 trung điểm ba cạnh BC, CA, AB

I, J, K là trung điểm 3 đoạn nối các đỉnh với 3 trực tâm.



Ta thấy các điểm đối xứng với H qua 3 cạnh BC, CA, AB là H_1, H_2, H_3 thuộc đường tròn tâm (O).

Các điểm đối xứng của H qua A_1, B_1, C_1 là A_2, B_2, C_2 thuộc đường tròn tâm (O).

Xét: $V_H^2 : A_1 \to A_2$

$$B_1 \to B_2;\ C_1 \to C_2;\ E \to H_1;\ D \to H_2$$

$$F \to H_3;\ I \to A;\ J \to B;\ K \to C$$

Mà 9 điểm A_2, B_2, C_2, H_1, H_2, H_3, A, B, C thuộc đường tròn (O). Vậy 9 điểm A_1, B_1, C_1, E, D, F, I, J, K thuộc đường tròn $V_B^{1/2}(O)$ (đpcm).

Dạng 3: Vận dụng phép vị tự để giải bài toán quỹ tích và dựng hình

Phương pháp chung:

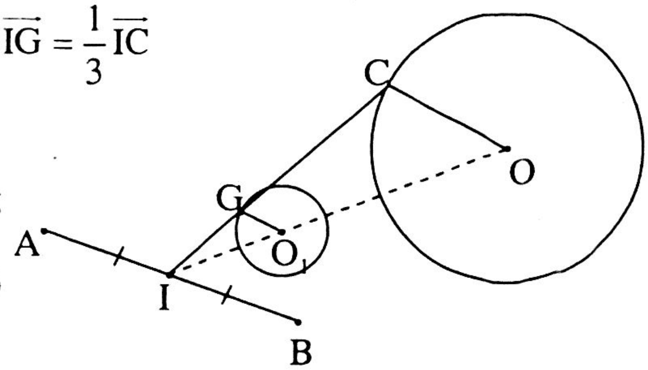
Bài toán quỹ tích: Tìm M thì quy về tìm M' qua một phép vị tự đã cho.

$M \in H$ *thì* $M' \in H' = V_B^k(H)$. *Dùng phép vị tự tỉ số* $V_B^{1/k} : (H') = H$.

Bài 126. Cho một đường tròn (O, R) và hai điểm A, B cố định sao cho đường thẳng AB không cắt (O, R). Một điểm C di động trên đườn tròn (O, R). Tìm quỹ tích trọng tâm G của ΔABC.

Giải

Gọi I là trung điểm AB. Ta có: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$

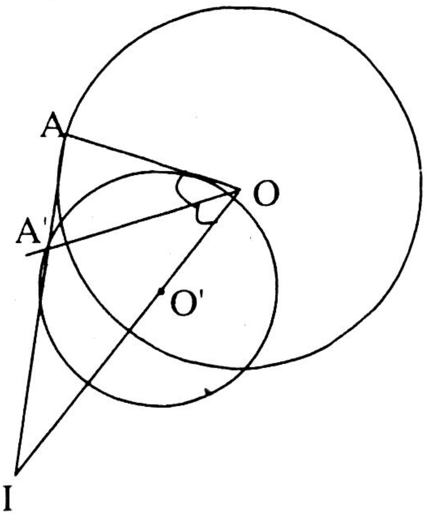


Vậy xét: $V_I^{1/3}(C) \to G$.

Mà $C \in (O, R) \Rightarrow G \in$ đường tròn $\left(O_1, \frac{1}{3}R\right)$ trong đó $\overrightarrow{IO_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$.

Bài 127. Cho đường tròn (O, R), một điểm I cố định. Một điểm A thay đổi chạy trên đường tròn. Phân giác góc $\widehat{IOA}$ cắt IA tại A'. Tìm quỹ tích A'.

Giải.



$$\frac{IA'}{A'A} = \frac{IO}{R}$$

$$\frac{IA'}{IA' + A'A} = \frac{IO}{R + IO}$$

$$\overrightarrow{IA'} = \frac{IO}{IO + R}\overrightarrow{IA}$$

Gọi độ dài IO = m $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = \frac{m}{m + R}\overrightarrow{IA}$

Xét: $V_I^{\frac{m}{m+r}}(\overrightarrow{IA}) = IA'$.

Vậy: $A' \in V_I^{\frac{m}{m+r}}(O)$.

II. Bài tập tự giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho I(1, 1) và M(3, 4). Hỏi phép vị tự tỉ số k = 2 biến M thành điểm nào dưới đây.

a) A(6, 8) b) B(5, 7) c) C(4, 6) d) D(4, 5).

Bài 2. Trong mặt phẳng cho I(2, -1) và đường thẳng (d): $3x + 2y - 2 = 0$. Phép vị tự tâm I tỉ số k = -2 biến đường thẳng d thành đường thẳng nào có phương trình sau:

a) $3x + 2y - 8 = 0$ b) $3x + 2y - 2 = 0$

c) $3x + 2y - 7 = 0$ d) $3x - 2y - 8 = 0$.

Bài 3. Cho đường thẳng (d) $3x - y + 1 = 0$ và điểm I(2, 7). Qua phép vị tự tâm I(2, 7) tỉ số k = 3 biến đường thẳng (d) thành đường thẳng nào dưới đây

a) $x + 3y + 1 = 0$ b) $3x - y + 1 = 0$ c) $3x + y - 1 = 0$ d) $-3x + y + 1 = 0$.

Bài 4. Cho điểm I(1, -1) và đường tròn $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Qua phép vị tự tâm I và tỉ số vị tự k = -2 biến đường tròn trên thành đường tròn nào dưới đây.

a) $(x-1)^2 + (y+7)^2 = 9$ b) $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 9$

c) $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 9$ d) $(x+1)^2 + (y+7)^2 = 9$.

Bài 5. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

a) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

b) Có vô số phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

c) Phép vị tự tỉ số k = -1 là phép đối xứng tâm.

d) Phép vị tự biến một đường thẳng không đi qua tâm thành một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Bài 6. Cho I(1, 1) và ΔABC trong đó: A(1, -1), B(2, 1), C(2, -1). Qua phép vị tự tâm (I) tỉ số k = 2. Trong các kết quả sau, kết quả nào đúng?

a) $A'(1,-3); B'(3,1); C'(3,-3)$ b) $A'(-1,3);$ $B'(-3,1);$ $C'(3,-3)$

c) $A'(-1,-3); B'(-3,-1); C'(3,3)$ d) $A'(1,3);$ $B'(3,1);$ $C'(-3,-3)$.

Bài 7. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ và điểm $I(1,-2)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k = -2 biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình.

a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 64$ b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 64$

c) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 64$ d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 64$.

Bài 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d: $2x - y = 0$, thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I(1, 2) tỉ số k = 2 và phép đối xứng trục Oy sẽ biến thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau:

a) $2x - y = 0$ b) $2x + y = 0$ c) $4x - y = 0$ d) $2x + y - 2 = 0$.

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $2x - y - 1 = 0$ và điểm I(0, -1) thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I, tỉ số k = -2 và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2,2)$ biến đường thẳng đã cho thành đường thẳng nào sau đây?

a) $2x - y - 3 = 0$ b) $2x - y + 1 = 0$ c) $2x - y + 3 = 0$ d) Có kết quả khác.

Phần 2. Bài tập luyện tập

Dạng 1: Vận dụng phép vị tự để chứng minh một số bài toán hình học.

- *Chứng minh 3 điểm thẳng hàng.*
- *Chứng minh một số tính chất hình học.*

Bài 127. Chứng minh rằng trong một hình thang, giao điểm hai cạnh bên, giao điểm hai đường chéo, trung điểm hai cạnh đáy thẳng hàng.

Bài 128. Trong ΔABC trên đường trung tuyến AA_1 lấy điểm D. Gọi $B_1 = BD \cap AC$; $C_1 = CD \cap AB$. Chứng minh $B_1C_1//BC$.

Bài 129. Cho ΔABC, trên đáy BC lấy B_1, C_1 sao cho $B B_1 = C C_1$, qua E và F kẻ các đường thẳng l_1, l_2 song song với cạnh bên. Chứng minh l_1, l_2 và trung tuyến AM đồng quy.

Bài 130. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đôi một tiếp xúc nhau; A là tiếp điểm của (O_1)và (O_2); B là tiếp điểm (O_2) và (O_3), C là tiếp điểm của (O_3) và (O_1). Đường thẳng AB cắt (O_3) tại B'; AC cắt (O_3) tại C'. Chứng minh B'C' là đường kính của (O_3).

Dạng 2. Giải bài toán quỹ tích và dựng hình

(Vận dụng phép vị tự để giải bài toán quỹ tích và dựng hình. Phương pháp giải: Tìm điểm cố định tỉ số cố định).

Bài 131. Cho đường tròn tâm (O, R); B, C hai điểm cố định thuộc đường tròn. A di động trên đường tròn. Tìm quỹ tích trọng tâm ΔABC khi A thay đổi.

Bài 132. Cho hai đường thẳng cắt nhau tại A trên đường tròn (O, R) tạo với nhau một góc α và chúng cắt đường tia B và C. Tìm

a) Tập hợp trọng tâm ΔABC khi hai đường thay đổi.

b) Tập hợp điểm D đối xứng với A qua trung điểm BC.

c) Tập hợp trực tâm ΔABC.

Bài 133. Cho họ đường tròn đi qua hai điểm A, B. Đường thẳng vuông góc với AB và tiếp xúc với đường tròn tại M. Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$. Các điểm A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh của tam giác ABM.

Bài 134. Cho góc $\widehat{xOy}$ và một điểm P ở trong góc đó. Qua P dựng một đường thẳng Δ cắt Ox, Oy tại A và B sao cho PA:PB = 1:2. Tổng quát hoá.

Bài 135. Cho ΔABC, dựng điểm $E \in AB$ và $F \in AC$ sao cho $BE = CF = \frac{1}{2}EF$.

Bài 136. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau ở A. Đường thẳng thay đổi đi qua A cắt (O) tại M cắt (O') tại M'. Gọi P, P' là trung điểm AM và AM'.

a) Tìm quỹ tích trung điểm của PP'.

b) Tìm quỹ tích trung điểm MM'.

Bài tập tự giải

Dựng ảnh của một hình qua phép vị tự.

Bài 137. Dựng ảnh đường thẳng (d): $2x - y + 2 = 0$ qua phép vị tự tâm $I(-1, 1)$ tỉ số $k = -2$.

Bài 138. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. Tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I(1, 2) tỉ số k = 2.

Bài 139. Cho 4 điểm A, B, C', D' thẳng hàng. $C'D' \in AB$ về cùng một phía với đường AB, dựng các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Chứng minh AA', BB', CC', DD' đồng quy.

Bài 140. Dựng một tam giác biết hai góc và đường cao tương ứng cạnh thứ 3.

Bài 141. Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$; $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$, cạnh BC = a.

Bài 142. Dựng đường tròn đi qua hai điểm AB và tiếp xúc với đường thẳng (Δ) cho trước.

Bài 143. Dựng một đường tròn đi qua một điểm A, tiếp xúc với đường tròn (I) cho trước và đường thẳng Δ cho trước.

Bài 144. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên một nửa đường tròn và hai đỉnh còn lại nằm trên đường kính nửa đường tròn đó.

Bài 145. Cho đường tròn đường kính AB, điểm C trên AB chia nó theo tỉ số CB:CA=1:2. Trên tia AB lấy D sao cho AB = BD. Khi M thuộc đường tròn.

a) Tìm tập hợp trọng tâm ΔAMD khi M thay đổi.

b) Tìm tập hợp các giao điểm DM và đường tròn tâm (M, MC).

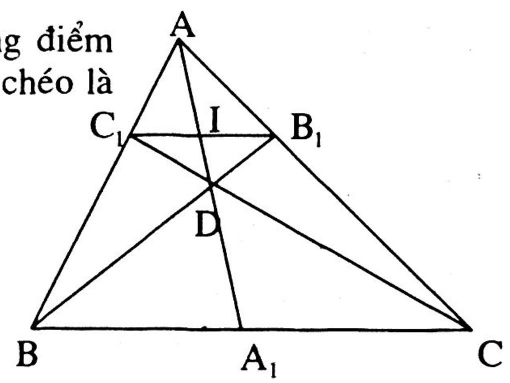
III. Hướng dẫn giải - đáp số

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 127.



Giả thiết cho BC_1B_1C hình thang. Trung điểm hai cạnh đáy là I, A_1. Giao của hai đường chéo là điểm D.

Tỉ số: $\dfrac{B_1C_1}{BC} = k$

Xét: $V_A^K : B \to C_1$, $C \to B_1$ $\Rightarrow A \to I$

(trung điểm BC biến thành trung điểm C_1B_1).
Nên AA_1I thẳng hàng.
Tương tự:

Xét: $V_D^{-k}: B \to B_1$

$C \to C_1$

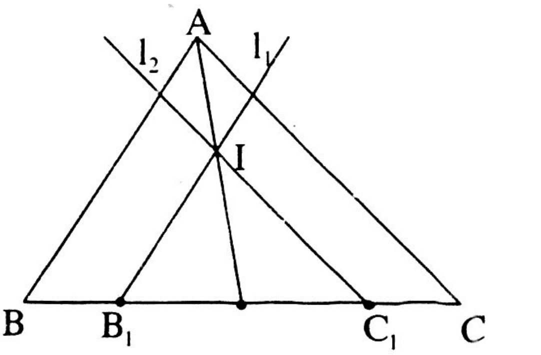
$A_1 \to I$ nên A_1ID thẳng hàng.

Vậy 4 điểm A_1, D, I, A thẳng hàng.

Bài 128.

Giả sử kẻ $B_1C_1'//BC$. Vận dụng bài 127 ta có $DC_1'C$ thẳng hàng $\Rightarrow C_1 \equiv C_1'$

Vậy $B_1C_1 // BC$.



Bài 129.

Vì $BB_1 = CC_1 \Rightarrow MB_1 = MC_1$

$$\frac{MB}{MB_1} = \frac{MC}{MC_1} = k$$

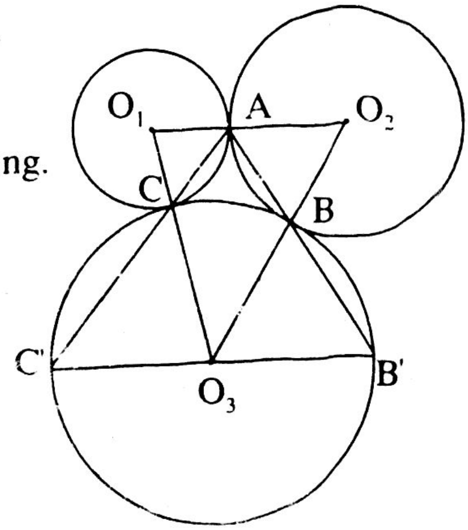
Xét: $V_M^K: B \to B_1$

$C \to C_1$

Nên: $AB \to l_1$ (và $AB//l_1$)

$AC \to l_2$ (và $AC//l_2$)

Nên $A \to l_1 \cap l_2 = I$ Vậy A, I, M thẳng hàng.



Bài 130.

Xét $V_B^{\frac{R_2}{R_3}}: O_2 \to O_3$

$A \to B'$

$\Rightarrow OA_2 // O_3B'$

$V_C^{\frac{V_1}{V_3}}: O_1 \to O_3$

$A \to C' \Rightarrow O_1A // O_3C'$

Mà O_1, A, O_2 thẳng hàng nên O_3, C', B' thẳng hàng $\Rightarrow$ B'C là đường kính.

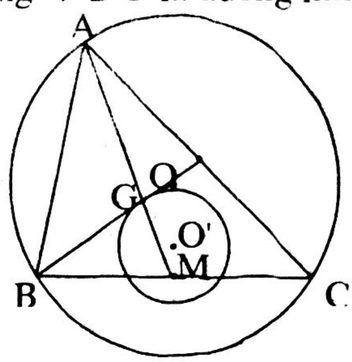
Bài 131.

BC cố định nên M là trung điểm BC cố định

Mà $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

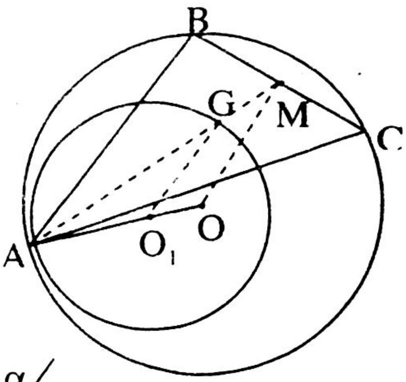
Xét: $V_M^{1/3}: A \to G$

Vậy A thay đổi trên đường tròn (O, R).



Suy ra G thuộc đường tròn $\left(O', \frac{1}{3}R\right)$

với $O' = V_M^{1/3}(O)$.



Bài 132.

a) Tìm tập hợp trọng tâm ΔABC.

$\widehat{BAC} = \alpha$ nên BC = a không đổi.

$BM = R\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow BC = 2\sin\frac{\alpha}{2}$; $OM = R\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (O, R').

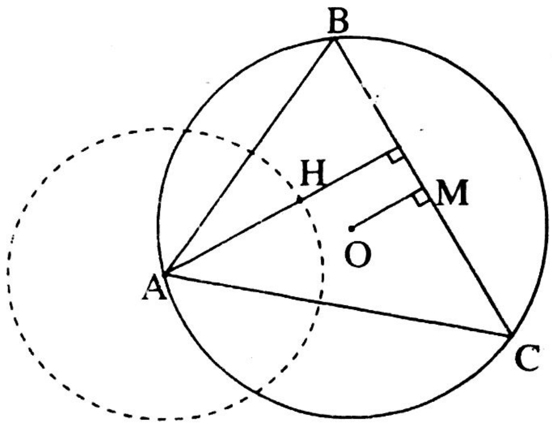
Vậy $R' = OM = R\cos\frac{\alpha}{2}$

Thật vậy: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Xét: $V_A^{2/3}: M \to G$ nên khi $M \in (O, R')$

Thì G thuộc đường tròn (O_1, R'') trong đó $O_1 = V_A^{2/3}(O)$;

$R'' = \frac{2}{3}R' = \frac{2}{3}R\cos\frac{\alpha}{2}$



b) Học sinh tự giải

c) Tìm tập hợp trực tâm ΔABC

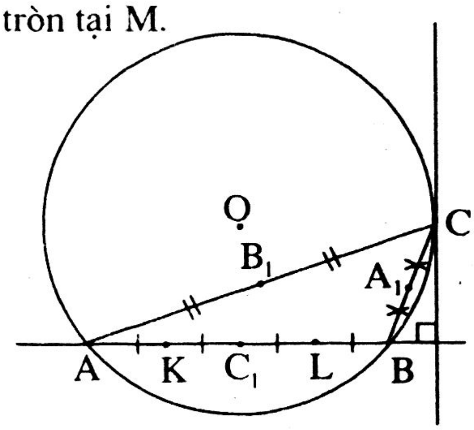
Gọi H là trực tâm ΔABC.

Thì $AH = 2OM$ mà $OM = R\cos\frac{\alpha}{2}$;

$AH = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$

H chạy trên đường tròn tâm A, $R_1 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$

Đường thẳng $xy \perp AB$ tiếp xúc với đường tròn tại M.



Bài 133.

Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ (A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh của ΔABM) là O'.

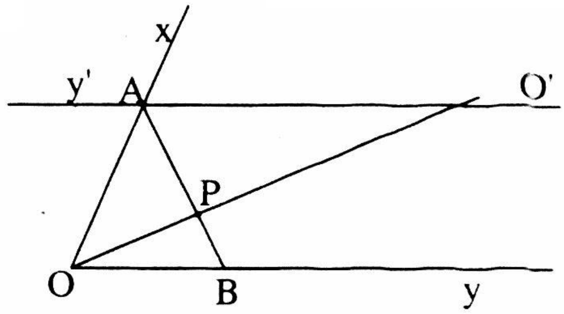
Gọi G trọng tâm ΔABM.

Xét: $V_G^{-1/2}: O \to O'$

Mà $OM \perp xy \Leftrightarrow NO' \perp xy \Rightarrow O' \in$ đường AB. Khi O thay đổi.

Giới hạn quỹ tích: Đường AB bỏ KL, với K, L trung điểm NA và NB.

Bài 134. Cho xOy. $P \in xOy$.



Dựng Δ: $(\Delta) \times Ox = A$

$(\Delta) \times Oy = B$

thoả mãn PA:PB = 1:2.

Phân tích ta thấy: $\overrightarrow{PA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}$

$V_P^{-2} : B \to A$

Mà $A \in Ox$; $A = V_P^{-2}(B)$.

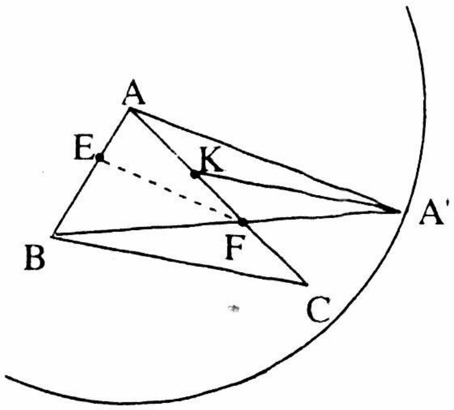
Nên: $A \in V_P^{-2}(Oy) = O'y$.

Tổng quát hoá:

Dựng Δ đi qua P sao cho Δ cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B thoả mản PA = kPB. (k > 0)

Bài 135.

Phân tích



Giả sử E, F dựng được thoả mản: $E \in AB$

$F \in AC$

Và $BE = CF = \frac{1}{2}EF$

Xét: $V_B^{\frac{AB}{BE}} : E \to A$

$F \to A'$

$C \to C'$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AA'}{EF} = \frac{A'C'}{CF} \Rightarrow AB = A'C' = \frac{1}{2}AA'$$

Vậy kẻ $A'K \,//\, BC \Rightarrow A'K \times AC = k$; $CK = AB$.

Cách dựng

Dựng (A, 2AB).

Đặt CK = AB kẻ KA'//BC.

Điểm A' dựng được $BA' \times AC = F \Rightarrow BE$

Chứng minh:

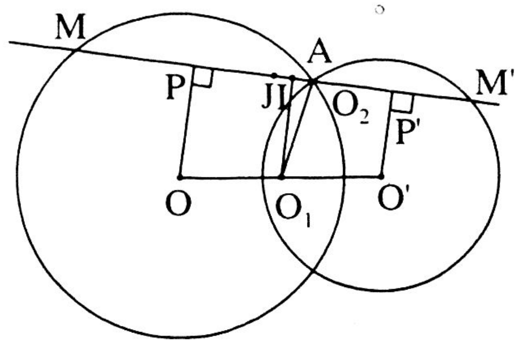
$BE = \frac{1}{2}EF$ vì AA' = 2AB.

$$A'C' = AB \Rightarrow \frac{CF}{A'C'} = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow CF = BE = \frac{1}{2}EF \text{ (đpcm).}$$

Bài 136.

Gọi I trung điểm PP'.

J trung điểm của MM'.



Ta thấy tứ giác OPP'O' là hình thang vuông nên:

$O_1I \perp AMM'$

(O_1I là đường trung bình hình thang) mà A, O_1 cố định.

Vậy I chạy trên đường tròn đường kính AO_1.

b) Vì là J là trung điểm của MM' nên

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'}\right) = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} = 2\overrightarrow{AI}$$

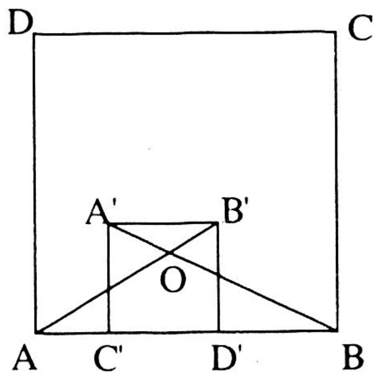
Xét: $V_A^2 : I \to J$ vậy $J \in V_A^2(O_2, \frac{1}{2}AO_1)$

Vậy $J \in V_A^2(O_1, \frac{1}{2}AO_1)$

Bài 137. (d'): $2x - y - 5 = 0$

Bài 138. (C'): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36$.

Bài 139.



Gọi O là giao điểm của AA' và BB' ta có:

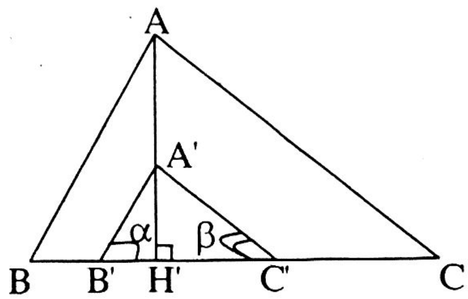
$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$\Rightarrow \Delta OB'C' \backsim \Delta OBC \Rightarrow C, O, C'$ thẳng hàng

$\Rightarrow$ CC', AA', BB' đồng quy.

Bai 140.

Dựng $\Delta A'B'C'$ có $\widehat{B'} = \alpha$, $\widehat{C'} = \beta$. Kẻ $A'H' \perp B'C'$



$V_{H'}^{a/A'H'} : A' \to A$

$B' \to B$

$C' \to C$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cần dựng.

Bài 141.

Cách 1: Dựng góc: $\widehat{xAy} = \alpha$

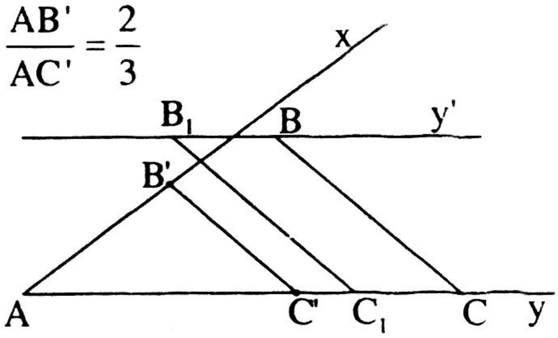
Dựng AB', AC' trong đó $B' \in Ax$; $C' \in Ay$

Thoả mản $AB' = \frac{2}{3}AC'$

$V_A^{B'C'/a} : B'C' \to BC$ và $BC = a$

ΔABC cần dựng.

Cách 2: Dựng $\Delta AB'C'$ có $\widehat{A} = \alpha$; $\dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{2}{3}$



Dựng $\begin{cases} B_1C_1 // B'C' \\ B_1C_1 = a \end{cases}$

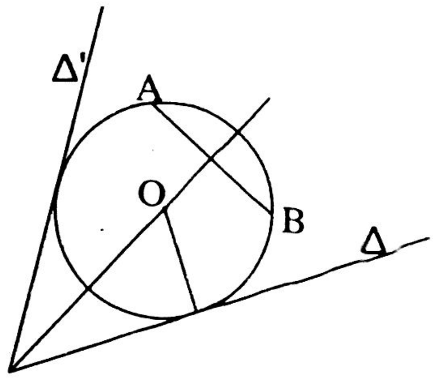
$C_1 \in Ay$

Từ B_1 kẻ $B_1y'//Ay$ cắt Ax tại B

Kẻ BC//B'C' với $C' \in Ay$.

ΔABC cần dựng.

Bài 142.



Giả sử (O, R) cần dựng. Tâm O nằm trên trung trực AB là (d) và tiếp xúc với Δ nên nếu Δ' đối xứng với Δ qua (d) thì Δ' tiếp xúc với (O).

Vậy suy ra cách cần dựng.

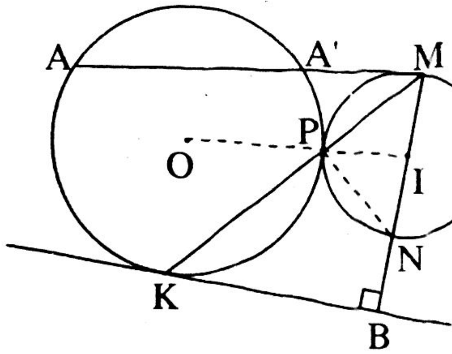
Dựng d là trung trực AB.

Δ' đối xứng Δ qua d; Δ cắt d tại I.

Dựng (O') tiếp xúc với Δ và Δ'.

$V_I^k(O') \to O$ cần dựng.

Bài 143.



Giả sử (O) dựng được thoả mản tiếp xúc với Δ tại K, tiếp xúc với (I) tại P.

I kẻ $MN \perp \Delta$.

Xét phép vị tự: $V_B^k : M \to k$

$$(I) \to (O)$$

Vậy: $\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MN}.\overline{MB}$ vì $\overline{MP}.\overline{MK} = \overline{MN}.\overline{MB}$

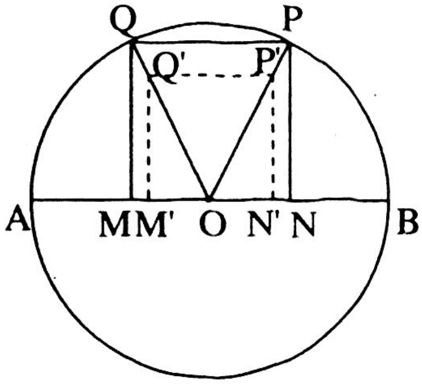
(Tứ giác KPNB nội tiếp)

Vậy đưa về tìm A' ⇒ đưa về bài toán (142)

Dựng đường tròn đi qua AA' tiếp xúc với Δ.

Bài 144.

Dựng M'N'P'Q' nội tiếp nửa đường tròn. M', N' đối xứng nhau qua O. M'N' thuộc đường AB.



Vận dụng phép vị tự:

$V_O^{\frac{OA}{OM'}} : Q' \to Q$

$P' \to P$

$M' \to M$

$N' \to N$

$\Rightarrow Q'P'M'N' \to QPMN.$

Bài 145.

Gọi G trọng tâm ΔAMD

$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$

Xét: $V_B^{1/3} : M \to G$.

Vậy G thuộc đường tròn $V_B^{1/3} : (O, R) \to (O', \frac{1}{3}R)$.

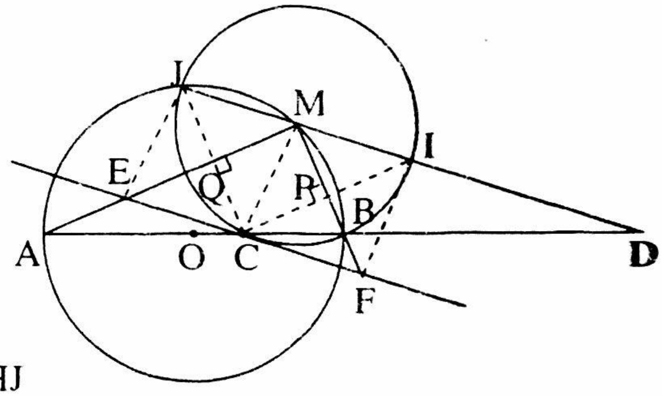
Kẻ EF đi qua C. EF //MD.

$\frac{EC}{MD} = \frac{AC}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (1)

$\frac{CF}{MD} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EC = CF$

Mà ΔEMF vuông ở M



nên $MC = EC = CF = MI = HJ$

Vậy ECMJ; CFIM là hình thoi

Xét: $V_C^2 : P \to I$ mà $P \in$ đường tròn đường kính CB.

$V_C^2 : Q \to J$ mà $Q \in$ đường tròn đường kính AC.

PHẦN 7. PHÉP ĐỒNG DẠNG. HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa:

Phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) là một phép biến hình trong mặt phẳng.

$f: P \to P$

$M \to M'$

$N \to N'$

Thoả mãn: $M'N' = kMN$

Số k gọi là tỉ số đồng dạng.

Hai hình H và H' gọi hình đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

II. Tính chất:

1. Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng.

2. Phép đồng dạng tỉ số k

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm tương ứng.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
- Biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với tam giác cho trước.
- Biến một đường tròn thành một đường tròn mà bán kính bằng k lần bán kính đường tròn cho trước.
- Biến một góc thành một góc có độ lớn hình học bằng độ lớn góc cho trước.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép đồng dạng.

Chú ý:

- *Khi thực hiện liên tiếp phép quay (hoặc tịnh tiến, đối xứng), phép vị tự cho ta phép đồng dạng.*
- *Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tỉ số k_1, k_2 thì được phép đồng dạng tỉ số $k_1.k_2$.*

Bài 146. Cho đường thẳng (d): $x - y + 1 = 0$ viết phương trình d' là ảnh của đường thẳng d qua phép đồng dạng bằng cách thực hiện qua phép vị tự tâm I(1, 1) tỉ số k = 2 và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-2, -1)$.

Giải.

Ta có $M(0,1) \in d$ qua phép vị tự $V_I^2 d \to d_1$

(d_1) có dạng phương trình: $x - y + c = 0$.

$M' = v_I^2(M)$ Vậy $M'(-1,1)$.

Vậy (d_1): $x - y + 2 = 0$.

Qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (-2,-1)$ thì (d_1) có ảnh d' thì (d') có dạng $x - y + 0 = 0$

$M_1 \in (d_1)$; $M_1(0,2)$ thì $T_{\vec{v}}(M_1) = M_1'(-2,1)$

Vậy (d') có phương trình: $x - y + 3 = 0$

Qua phép đồng dạng (d): $x - y + 1 = 0$ có ảnh đường thẳng (d'): $x - y + 3 = 0$

Bài 147. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Xác định ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số k = -2 và phép đối xứng trục Oy.

<u>Giải.</u>

(C) có tâm I(1, 2) bán kính R = 2

Qua phép $V_O^{-2}(I) = I'(-2,-4)$

Qua $V_O^{-2}(C) \to (C_1): (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.

(C_1) có tâm $I_1(-2,-4)$ bán kính $R_1 = 4$.

(C') đối xứng (C_1') qua (Oy): $I'(2,-4)$.

Vậy (C') có phương trình: $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 16$.

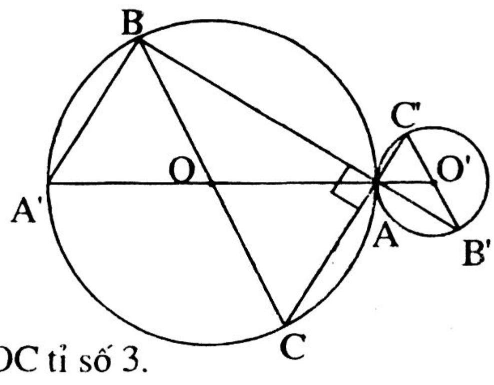
Dạng 2: Vận dụng phép đồng dạng để chứng minh một số tính chất các hình.

Bài 149. Cho hai đường tròn (O,3R) và (O',R) tiếp xúc với nhau tại A (tiếp xúc ngoài). Đường thẳng d đi qua A cắt (O, 3R) tại B cắt (O',R) tại B', đường thẳng d' ⊥ d tại A cắt (O, 3R) và (O', R) tại C và C', đường thẳng OA cắt (O, 3R) tại A'.

a) Chứng minh ΔOA'B ∽ ΔO'AC'.

b) Chứng minh OO', BC', CB' đồng quy tại M cố định.

<u>Giải</u>



a) Ta thấy $A'B \perp AB$; $OC \perp AB$

$\Rightarrow A'B' // AC \Leftrightarrow \Delta A'OB = \Delta AOC$

Xét: $V_A^3 : (O') \to (O)$

$B' \to B$

$C' \to C$

$(O') \to (O)$

$\Leftrightarrow \Delta AO'C' \to \Delta AOC \Rightarrow \Delta AO'C \backsim \Delta AOC$ tỉ số 3.

Vậy ΔA'OB ∽ ΔAO'C' (đpcm).

$V_A^3 : (O') \to O \Rightarrow BC // B'C'$.

$\Rightarrow$ BCB'C' là hình thang nên OO', BC', CB' đồng quy.

Bài 150. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$. Gọi phép f là phép biến hình liên tiếp phép vị tự và phép tịnh tiến T.

a) Tìm điểm I sao cho f biến I thành chính nó.

b) Chứng minh f là phép vị tự tâm I.

<u>*Giải*</u>

Tìm I mà

$V_O^k : I \to I'$

$T_{\vec{v}} : I \to I''$

Mà $I'' \equiv I$

Điểm I thoả mãn: $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{1-k}\vec{v}$.

Điểm I là điểm kép qua thực hiện liên tiếp V_O^k và $T_{\vec{v}}$

Thật vậy: $V_O^k : I \to I'$ thoả mãn $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ (1)

$T_{\vec{v}} : I' \to I''$ thoả mãn $\overrightarrow{I'I''} = \vec{v}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{OI''} = k\overrightarrow{OI} + \vec{v} = k\overrightarrow{OI} + (1-k)\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{OI} \Rightarrow I'' \equiv I$.

b) Phép f là phép vị tự tâm I tỉ số k.

Thật vậy f: $V_O^k : M \to M'$ thoả mãn $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

$\vec{v} : M' \to M''$ thoả mãn $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$

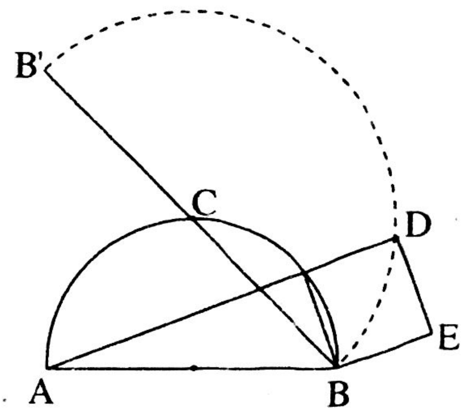
Ta có: $\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M''} = k\overrightarrow{OM} + (1-k)\overrightarrow{OI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM''} = \overrightarrow{OI} + k\overrightarrow{OM} + K\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM''} = k\overrightarrow{IM}$ (*)

Đẳng thức * chứng tỏ: $M \to M''$ qua V_I^k.

Dạng 3: Vận dụng phép đồng dạng để giải bài toán quỹ tích và dựng hình.

Bài 151. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Một điểm C thuộc nửa đường tròn dựng phía ngoài ΔABC hình vuông BCDE. Tìm quỹ tích D.



<u>*Giải*</u>

Ta thấy:

$\widehat{CBD} = 45^0$

Xét: $\dfrac{CB}{BD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Xét: $Q_B^{-45^0} : C \to C'$

$V_B^{\sqrt{2}} : C' \to D$

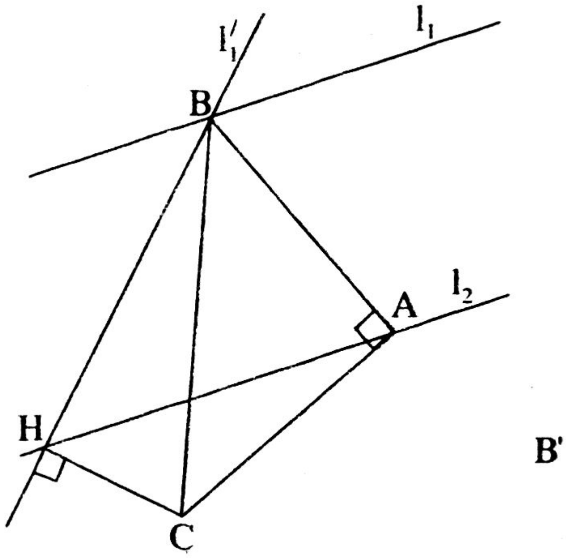
Vậy D là ảnh đồng dạng của điểm M qua thực hiên liên tiếp $Q_B^{-45^0}$ và phép vị tự $V_B^{\sqrt{2}}$.

Vậy $D \in V_B^{\sqrt{2}}.Q_B^{-45^0}(O) = \left(O', \sqrt{2}R\right)$.

Bài 151. Dựng tam giác vuông cân ABC, cân ở A. Biết đỉnh C đã cho và A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng l_1, l_2 song song với nhau.

Giải

Phân tích



Giả sử ΔABC dựng được thoả mãn điều kiện của bài toán.

$\widehat{BAC} = \pi/2$

$AB = AC$

$\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow CB = \sqrt{2}CA$

$(CA, CB) = \pi/4$

Vậy xét phép biến hình thực hiện liên tiếp: $Q_C^{\pi/4}(A) \to A'$ và $V_C^{\sqrt{2}}(A') \to B$ mà $B \in l_2$ và B thuộc ảnh của l_1 qua thực hiện liên tiếp phép quay $Q_C^{\pi/4}$ và phép vị tự $V_C^{\sqrt{2}}$ được l_1'.

Cách dựng.

$l_1' = V_C^{\sqrt{2}}.Q_C^{\pi/4}(l_1)$

$l_1' \times l_2 = B$.

Thực hiện liên tiếp phép $V_C^{\sqrt{2}}$ và $Q_C^{\pi/4}$ thì B thành A. ΔABC cần dựng.

II. Bài tập tự giải.

Bài 152. Cho đường thẳng (d): $x - 2y + 1 = 0$, dựng ảnh của d qua phép biến hình khi thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1, -1)$, tỉ số $k = 2$ và phép đối xứng trục là Ox.

Bài 153. Chứng minh rằng tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Bài 154. Dựng một hình vuông nội tiếp tam giác ABC. Hai đỉnh thuộc một cạnh, hai đỉnh kia thuộc hai cạnh còn lại.

Bài 155. Dựng ΔABC biết ba đường cao h_a, h_b, h_c thuộc các cạnh BC, CA, AB.

III. Hướng dẫn giải - Đáp số.

Bài 152. (d): $x - 2y + 1 = 0$, điểm $I(-1,-1)$, $k = 2$.

$d' = V_I(d): x - 2y + 3 = 0$

d" đối xứng với d' qua Ox khi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

d" có phương trình: $x + y + 3 = 0$.

Bài 153. ΔABC đồng dạng $\Delta A'B'C'$.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k;$$

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Leftrightarrow \frac{AH.BC}{A'H'.B'C'} = k^2 = \frac{2S_{\Delta ABC}}{2S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$$

Bài 154.

Giả sử hình vuông PQEF dựng được EF//PQ//BC. Nối BE, trên BE lấy E_1 kẻ E_1F_1// EF;

F_1P_1//FP; E_1Q_1//EQ.

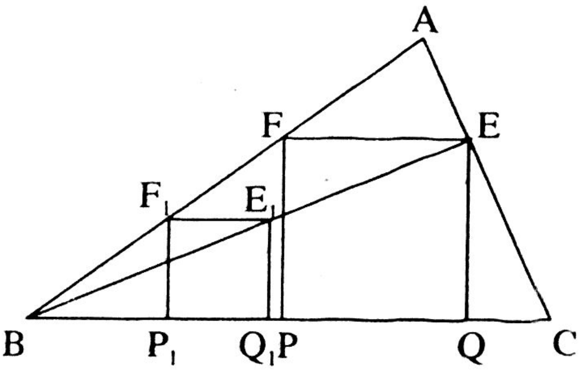
$\Delta BEF \backsim \Delta BE_1F_1$

$$\Rightarrow \frac{F_1E_1}{FE} = \frac{BE_1}{BE} = \frac{E_1Q_1}{EQ}$$

Nên $F_1E_1P_1Q_1 \backsim FEPQ$ vậy $F_1E_1P_1Q_1$ là hình vuông dựng được.

Suy ra cách dựng:

Trên AB lấy F_1 bất kì, dựng $F_1P_1 \perp BC$



Lấy F_1P_1 làm cạnh, dựng hình vuông $F_1E_1P_1Q_1$.

Nối BE_1 cắt AC tại E.

Dựng EF//E_1F_1; FQ//E_1Q_1 được hình vuông FPQE cần dựng.

Với cách dựng trên có một hình vuông.

Lấy cạnh AC có hai đỉnh thì có một hình vuông tương tự.

Vậy bài toán có 3 hình vuông nội tiếp ΔABC.

Bài 155.

Phân tích

Theo bài ra gọi các cạnh BC, CA, AB có độ dài tương ứng a, b, c. Ta có:

$ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{\Delta ABC}$

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} = \frac{1}{h_b} = \frac{1}{h_c}$$

Gọi các đường cao của tam giác có độ dài các cạnh là h_a, h_b, h_c tương ứng h_1, h_2, h_3.

Khi đó $h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$

Vậy $h_1 : h_2 : h_3 = a : b : c$.

Nên ΔABC cần dựng đồng dạng với tam giác có các cạnh h_1, h_2, h_3 là các đường cao tam giác có độ dài các cạnh h_a, h_b, h_c.

Cách dựng:

Dựng $\Delta A_1B_1C_1$ có các cạnh h_a, h_b, h_c lấy độ dài các đường cao tương ứng h_1, h_2, h_3.

Dựng $\Delta A'B'B'$ có độ dài các cạnh h_1, h_2, h_3.

Dựng $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ mà đường cao của tam giác ABC thuộc cạnh BC bằng h_a.

Chương 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

Phần 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. Kiến thức cơ bản

I. Các tiên đề của hình học không gian.

Tiên đề 1: Qua hai điểm phân biệt trong không gian có một và chỉ một đường thẳng mà thôi.

Tiên đề 2: Qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một mặt phẳng mà thôi.

Tiên đề 3: Một đường thẳng có hai điểm nằm trong mặt phẳng thì nó nằm trong mặt phẳng.

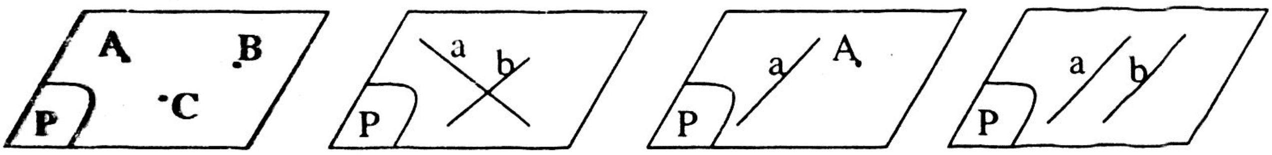
Tiên đề 4: Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì có một đường thẳng chung đi qua qua điểm phân biệt ấy, người ta gọi đường thẳng chung của hai mặt phẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng.

II. Các cách xác định mặt phẳng.

Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định trong các trường hợp sau:

1. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng.
2. Qua hai đường thẳng cắt nhau.
3. Qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.
4. Qua hai đường thẳng song song với nhau.

Biểu thị



Kí hiệu:

(A, BC) là mặt phẳng chứa (A, B, C).

(a, b) là mặt phẳng xác định bởi a, b.

(A, a) là mặt phẳng xác định bởi A, a.

III. Hình chóp - Tứ diện

1. Hình chóp: Trong một mặt phẳng α cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$. Điểm S nằm ngoài mặt phẳng. Nối S với các điểm $A_1, A_2\ A_3...A_n$ ta được n miền tam giác SA_1A_2, SA_2A_3.... SA_nA_1. Hình gồm miền đa giác $A_1A_2\ A_3...A_n$ và n miền tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,.... SA_nA_1 được gọi là hình chóp. Kí hiệu $SA_1A_2A_3.... A_n$.

2. Tứ diện: Hình chóp các mặt bên là tam giác gọi là tứ diện.

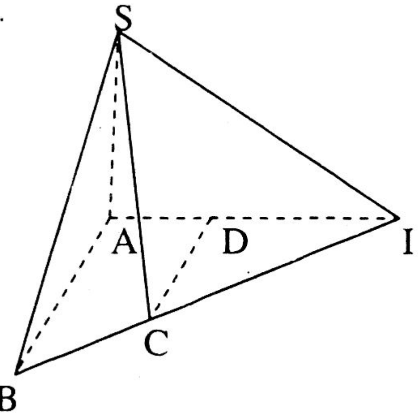
B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

Phương pháp giải:

- *Xác định 2 mặt phẳng*
- *Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.*



Bài 156. Cho hình thang ABCD (AB//CD, AB > CD), một điểm S ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Giải

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có một điểm chung S.

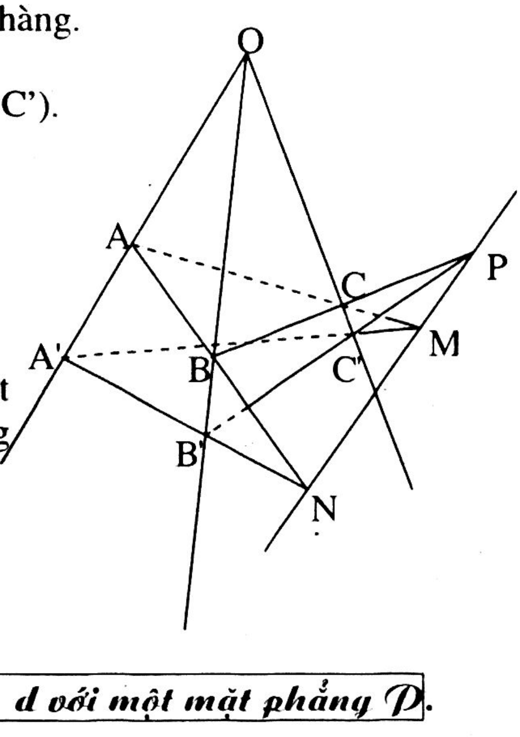
$AD \in (SAD)$ vì A, D nằm trọn trong mặt phẳng (SAD).

$BC \in (SBC)$ vì B, C nằm trọn trong mặt phẳng (SBC).

$BC \times AD = I$.

Vậy : $I \in (SAD)$ vì $I \in AD$; $I \in (SBC)$ vì $I \in BC$

Bài 157. Cho 3 điểm A, B, C lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz. 3 điểm A', B', C' lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz. $AB \cap A'B' = M; BC \cap B'C' = N;$ $CA \cap C'A' = P$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.



Giải

Xét mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (A'B'C').

$N \in (ABC)$ vì $AC \in (ABC)$

$N \in (A'B'C')$ vì $A'C' \in (A'B'C')$

Tương tự $M \in (ABC)$; $M \in (A'B'C')$

$P \in (ABC)$; $P \in (A'B'C')$

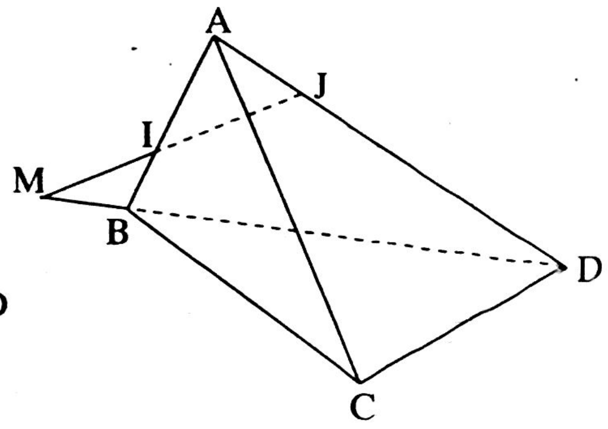
Vậy M, N, P thuộc giao tuyến hai mặt (ABC) và (A'B'C'), suy ra M, N, P thẳng hàng.

Dạng 2: Tìm giao điểm đường thẳng d với một mặt phẳng P.

Phương pháp giải:

- *Chọn mặt phẳng Q chứa d. Mặt phẳng* $Q \times P = d' \Rightarrow d \times d' = I$.
- *I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng P.*

Bài 158. Cho tứ diện ABCD. Lấy AB điểm I sao cho $IB = \frac{2}{3}AI$; $AJ = \frac{1}{4}JD$, Tìm giao điểm đường JI với mặt phẳng (BCD).



Giải

Do $\begin{cases} IB = \frac{2}{3}AI \\ AJ = \frac{1}{4}JD \end{cases}$

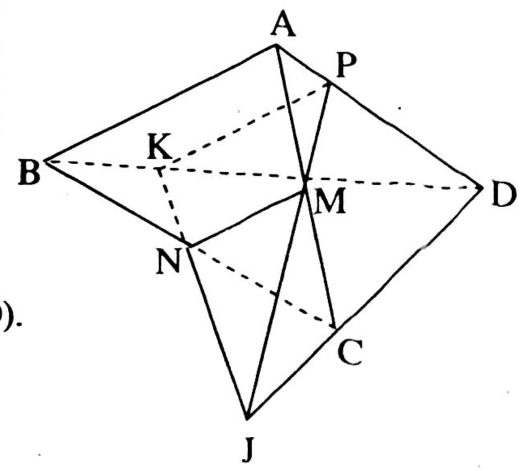
$JI \in (ABD)$

Giao tuyến $(ABD) \times (ADC) = BD$

Vậy giao điểm $IJ \times BD = M$.

$M = JI \times (BCD)$.

Bài 159. Cho tứ giác ABCD các điểm M, N lần lượt là các trung điểm của AC và BC, lấy điểm K thuộc BD (K không là trung điểm BD). Tìm giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK).



Giải

Ta thấy: $AD \in (ACD)$.

Tìm giao tuyến mặt (MNK) với mặt (ACD).

Điểm $M \in (ACD)$

$M \in (MNK)$

Trong mặt phẳng (BCD)

$KN \times CD = J$ mà $CD \in (ACD)$; $KN \in (MNK)$ nên $J \in (ACD)$ và $J \in (KNM)$. Vậy giao tuyến hai mặt phẳng là đường JM $\Rightarrow JM \times AD = P$

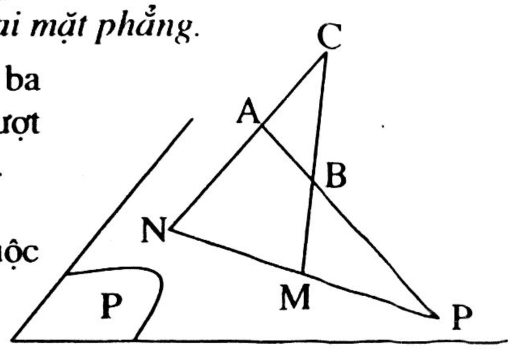
Vậy $P = (KMN) \times AD$ (điểm phải tìm).

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Phương pháp chứng minh:

- *Chứng minh M,N,P thẳng hàng thì ta tìm M, N, P thuộc hai mặt phẳng và chính là giao tuyến hai mặt phẳng.*

Bài 160. Cho một mặt phẳng (Q) và ba điểm A, B, C. BC, AC, AB cắt (Q) lần lượt M, N, P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.



Giải

Xét mặt phẳng (ABC) thì M, N, P thuộc (ABC) và M, N, P thuộc mặt phẳng (Q).

Vậy M, N, P thuộc giao tuyến $(ABC)\times(Q)$.

Bài 161. Cho hình chóp SABC trong các miền tam giác SAB, SBC, SCA lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho các đường LM, MN, NL cắt mặt phẳng.

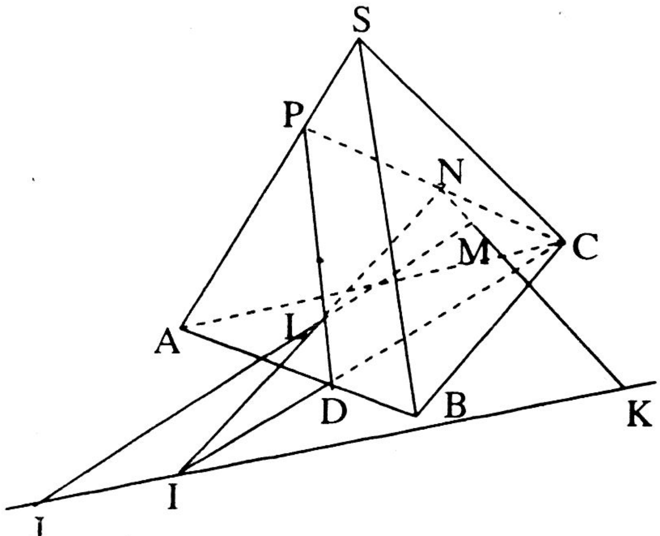
Xác định các giao điểm IJK của LM, MN, NL với mặt phẳng (ABC)

Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

<u>*Giải*</u>

Xác định giao điểm LM với mặt phẳng (ABC).

Xét mặt phẳng (LMC) với mặt (ABC) có một điểm C chung. Cần xét thêm một điểm chung nữa. Ta biết giao tuyến của (LNC) với (ABC)



$(LNC)\times(SAC) = LC$

$NC\times SA = P \Leftrightarrow PL\times AB = I$

$\Rightarrow$ CD giao tuyến của mặt $(LNC)\times(ABC) = CD \Leftrightarrow NL\times CD = I$

Tương tự: $LM\times(ABC) = J$.

$NM\times(ABC) = K$.

Xét mặt phẳng (LNM) và mặt phẳng (ABC) thì (MNL) chứa I, J, K

(ABC) chứa I, J, K .

Nên I, J, K thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

II. Bài tập tự giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Cho hai điểm A, B, có bao nhiêu mặt phẳng chứa hai điểm đó? Mệnh đề nào sau đây đúng.

a) Chỉ có một mặt phẳng duy nhất

b) Chỉ có hai mặt phẳng chứa hai điểm đó

c) Chỉ có ba mặt phẳng chứa hai điểm đó

d) Có vô số mặt phẳng chứa hai điểm đó.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. M, N lần lượt thuộc AB, AC, $MN\times BC = I$. Các giao tuyến (MCD) với mặt phẳng (ABD), (ACD) là

a) DM, DN b) ID, MD c) IA, ND d) Có kết quả khác.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD; J, K lần lượt thuộc BC, CD, $JK\times BD = E$, một điểm F thuộc AD, $EF\times AB = I$. Giao tuyến của mặt phẳng (JKF) với mặt phẳng (ABD) và (ABC) là:

a) EF, IJ b) IK, JI c) IF, JK d) Có kết quả khác.

Bài 4. Cho n điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Các mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Có ít nhất ba điểm thẳng hàng
b) Có vô số điểm lớn hơn 3 thẳng hàng
c) Không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng
d) Có kết quả khác.

Bài 5. Cho n điểm trong đó bất kì 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng.

a) n điểm đó đồng phẳng
b) Có ít nhất 5 điểm không đồng phẳng
c) Có ít nhất hai mặt phẳng riêng biết chứa tất cả các điểm
d) Có kết quả khác.

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 162. Cho hình chóp SABCD. A', B', C' lần lượt nằm trên cạnh SA, SB, SC. Dựng thiết diện hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (A'B'C').

Bài 163. Cho hình chóp SABCD, ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt trung điểm SA, BC, CD. Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNP).

Bài 164. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M, N theo thứ tự trung điểm của AB, SC.

a) Xác định giao điểm I, J của mặt phẳng (SBD) theo thứ tự đường thẳng AN, MN
b) Tính tỉ số IA:IN và JM:JN
c) Chứng minh ba điểm B, I, J thẳng hàng
d) Tính tỉ số IB:IJ.

Bài 165. Cho hai hình thang ABCD và ABEF chung đáy AB (đáy lớn AB) không cùng nằm trong mặt phẳng.

a) Xác định giao tuyến mặt (AEC) và (BFD); (BCE) và (ADF)
b) Lấy một điểm $M \in DF$. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt (BCE)
c) Chứng minh hai đường AC và BF không cắt nhau.

Bài 166. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng $a \times b = I$. Ngoài mặt phẳng (P) cho hai điểm M, N sao cho $MN \times (P) = O$ và O không thuộc a, b. Đường thẳng c đi qua O cắt a, b tại A, B. Gọi A' là giao điểm của AN và BM, B' là giao của AM và BN.

a) Tìm quỹ tích A', B'
b) Chứng minh A'B' đi qua một điểm cố định.

Bài 167. Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là tứ giác lồi, một mặt phẳng chứa cạnh bên, chia đáy hình chóp thành hai phần có diện tích bằng nhau. Dựng thiết diện.

Bài 168. Cho hình chóp SABCD đáy không phải là hình thang. Gọi M là trung điểm SA. Dựng thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (BCM).

Bài 169. Cho hình chóp SABCD bất kì. Dựng thiết diện đi qua M, N, I.

a) $M \in AB$; $N \in SC$; $I \in SD$

b) $M \in AB$; $N \in SC$; $I \in SA$.

Bài 170. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm ΔACD. M, N, P các điểm thuộc các cạnh AB, AC, AD tương ứng. $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I, J là giao điểm của MN với BC và MP với BD.

a) Chứng minh các đường MG, PI, NJ đồng phẳng.

b) Gọi EF, là các trung điểm CD, MI; H là giao điểm của MG và BE. K là giao điểm của GF với mặt phẳng (BCD). Chứng minh các điểm H, K, I, J thẳng hàng.

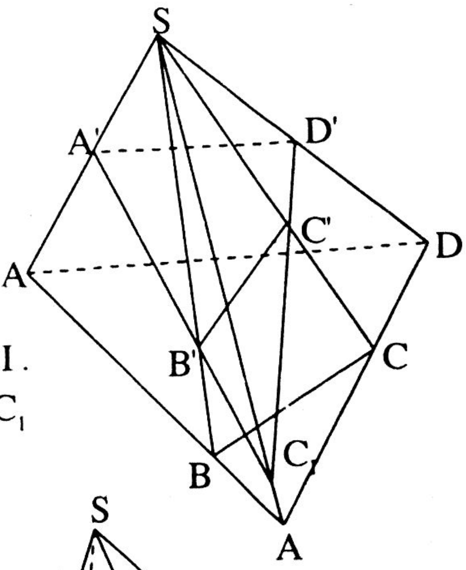
III. Hướng dẫn giải - đáp số

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
d	d	a	c	a

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 162.



Phương pháp giải:

Tìm giao điểm các cạnh với mặt (A'B'C').

Tìm giao tuyến (A'B'C') với mặt (SCD).

Ta thấy có điểm chung C'.

Cần tìm điểm chung thứ 2.

Giao tuyến mặt (SAB) với (SCD)

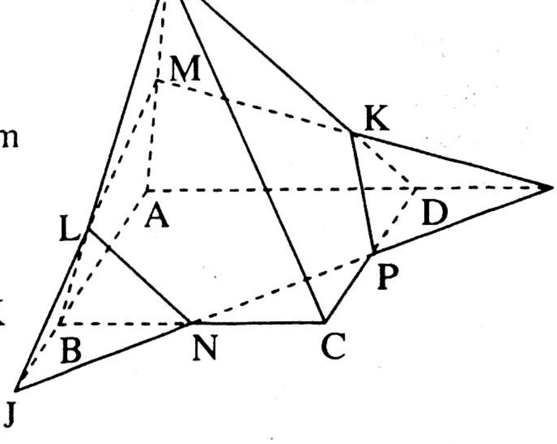
Có điểm chung S, điểm thứ 2 là $AB \times DC = I$.

Vậy $(SAB) \times (SCD) = SI$. Vậy $A'B' \times SI = C_1$

C_1 là điểm chung thứ 2 (A'B'C') với (SCD).

$C'C_1 \times SD = D'$ mặt thiết diện (A'B'C'D').

Bài 163.



Tìm giao SD với mặt (MNP).

Xét mặt (SAD) và (MNP) có điểm chung M.

Tìm điểm chung thứ 2: $NP \times AD = I$

I là điểm chung thứ 2

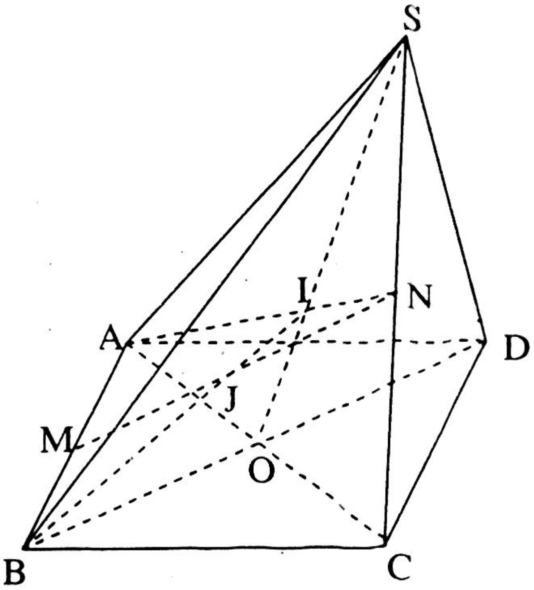
$\Rightarrow (SAD) \times (MNP) = MI$; $MI \times SD = K$

Tương tự: $(SAB)\times(MNP)$ có 1 điểm chúng M.

Điểm chung thứ 2 là $NP\times AB = J$

$SB\times MJ = L$. Vậy thiết diện MLNPK.

Bài 164.



a) Xét hai mặt phẳng (SBD) và (SAC) thì SO là giao tuyến của 2 mặt phẳng

$\Rightarrow AN\times(SBD) = AN\times SO = I$.

Mặt (ANB) và (SBD) có giao tuyến BI.

Vậy $MN\times(SBD) = MN\times BI = J$.

Vậy B, I, J thẳng hàng.

Xét trong ΔSAC có I là trọng tâm $\Delta SAC \Rightarrow IA : IN = 2$.

b) Xét ΔABN thì MN là trung tuyến.

Theo bài 127 và $\frac{IN}{NA} = \frac{1}{3}$

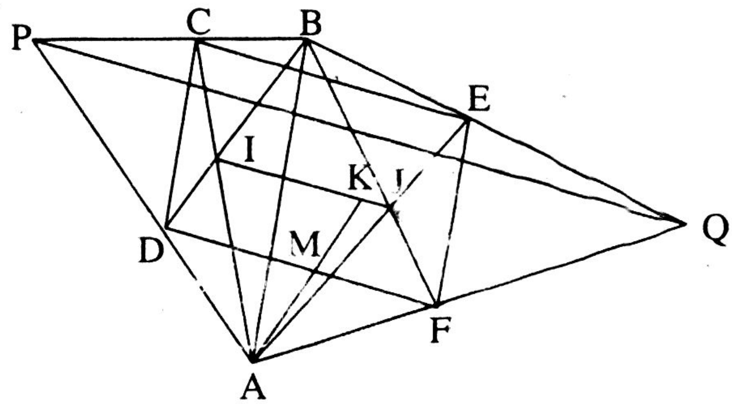
$$\Rightarrow \frac{IJ}{JB} = \frac{JK}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IJ}{IJ+JB} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} = \frac{IJ}{IB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow JB : IJ = 4$$

Trong ΔABN: $\frac{NP}{NM} = \frac{1}{3} = \frac{JP}{MJ} = \frac{NJ}{MN+MJ} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3NJ = MJ + JN + MJ \Leftrightarrow 3NJ = 2MJ \Leftrightarrow MJ : NJ = 1$.

Bài 165.

a) Xác định giao của: $(AEC)\times(BDF)$



$BD\times AC = I$ thuộc hai mặt phẳng

$BF\times AE = J$ thuộc hai mặt phẳng.

Vậy

$(AEC)\times(BDF) = IJ$

Xác định giao của (BCE) và (ADF)

$AD\times BC = P$ thuộc hai mặt phẳng

$AF\times BE = Q$ thuộc hai mặt phẳng

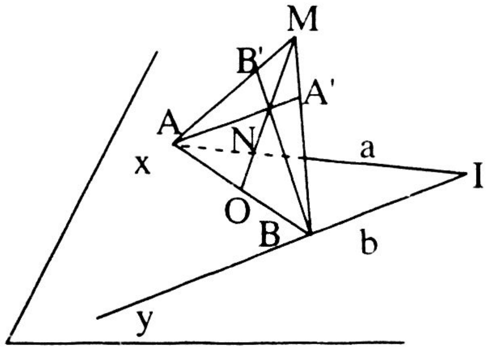
Vậy giao tuyến (BCE) và (ADF) là PQ.

b) Lấy M thuộc DF. Tìm giao AM với (BCE).

$AM\times PQ = K$ (điểm phải tìm).

c) Giả sử AC và EF cắt nhau nghĩa là A, C, B, F thuộc một mặt phẳng α thì α chứa ABC $\Rightarrow \alpha \equiv (ABCD)$ và α chứa (ABF) thì $\alpha \equiv (ABEF)$. Vậy điều này vô lí nên AC và BF không cắt nhau.

Bài 166.



a) $A' \in BM \Rightarrow A' \in (M, b)$

$A' \in AN \Rightarrow A' \in (N, a)$

Vậy A' thuộc giao tuyến hai mặt $(M, b) \times (N, a) = Ix$.

Vậy A' thuộc đường thẳng Ix.

$B' \in BN \Rightarrow B' \in (N, b)$

$B' \in AM \Rightarrow B' \in (M, a)$

Vậy B' thuộc giao tuyến hai mặt $(N, b) \times (M, a) = Iy$

Vậy B' thuộc đường thẳng Iy

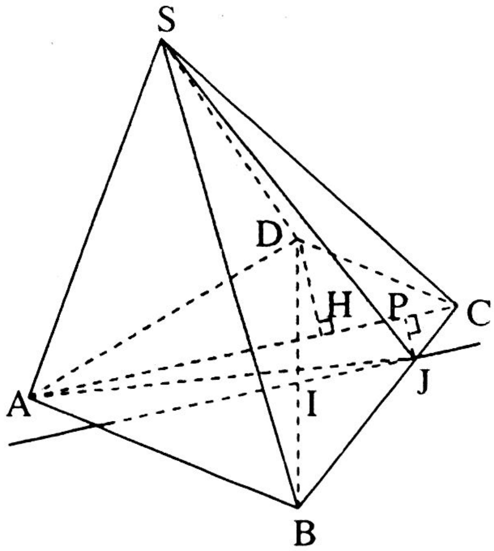
Vậy A' thuộc đường thẳng Ix cố định giao hai mặt phẳng (M, b) và (N, a)

Vậy B' thuộc đường thẳng Iy cố định giao hai mặt phẳng (M, a) và (N, b).

b) Chứng minh A'B' đi qua một điểm cố định.

Theo chứng minh câu a thì A'B' thuộc mặt xIy cố định.

A'B' và MN nằm trong mặt phẳng $A'B' \times MN = I$ mà $MN \times (xIy) = J$ vậy J cố định.



Bài 167. Giả sử ta lấy cạnh bên SA.

Ta tìm đường Ax chia ABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lấy I trung điểm BD.

Kẻ Ix//AC cắt BC tại J

Đường AJ đường cần tìm.

Thật vậy:

$2S_{AJCD} = AC.h$ (1) trong đó $h = DH + JP$

$2S_{ABJ} = AC(H + JP) - (JP.AC) = 2S_{ABC} - 2S_{AJC} = AC.h$ (2)

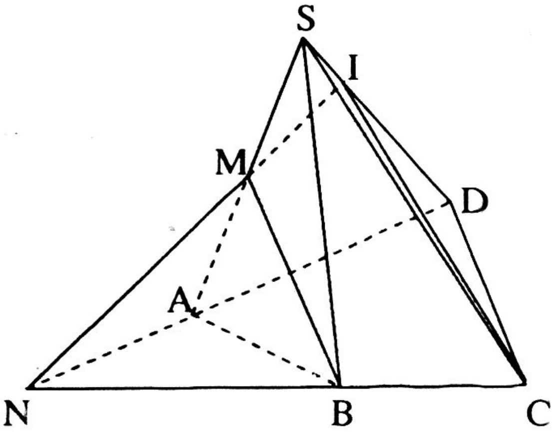
Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_{AJCD} = S_{ABJ}$

Bài 168. Phương hướng giải tìm giao mặt với các cạnh hình chóp.

Cách 1: Xét giao của (SAD) và mặt (SBC) có điểm chung $AD \times BC = N$

Vậy $(BCM) \times (SAD) = MN \Rightarrow MN \times SD = I$

Vậy thiết diện MBCI.
Cách 2: Gọi giao 2 đường chéo
$SM \times SO = J \Rightarrow BJ \times SD = I$
Tứ giác BCIM là thiết diện.



Bài 169.

Gọi mặt phẳng $(MNI) \equiv R$

$(R) \times (SDC) = IN$

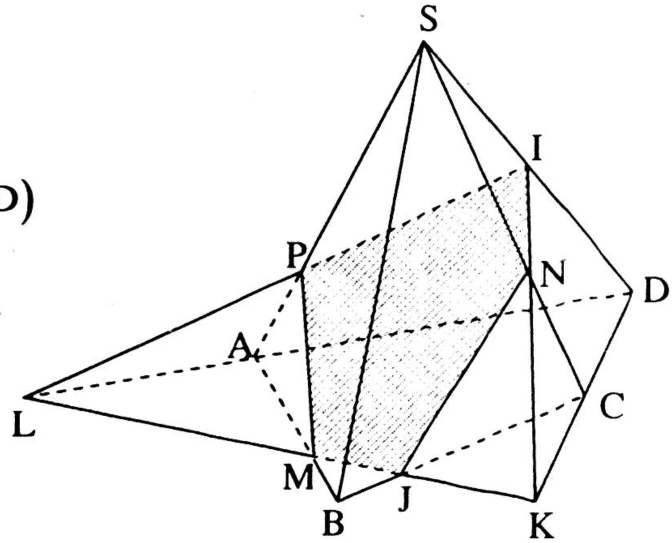
$IN \times DC = K$

$MK \times BC = J \in R$

$MK \times AD = L \in R, \quad L \in (SAD)$

$LI \times SA = P$

Vậy thiết diện MJNIP cần tìm.
b) Giải tương tự.



Bài 170.

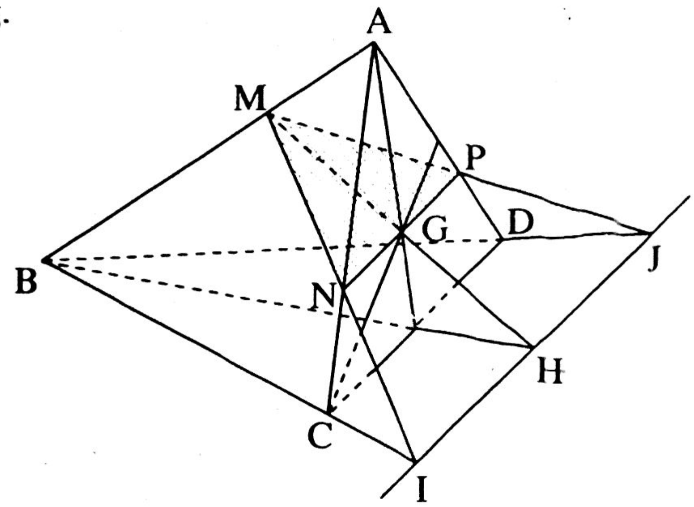
a) Ta thấy các điểm M, N, I, J, P cùng thuộc một mặt phẳng chứa MJ và MI.

Xét ΔADC thì NP//DC vì $\dfrac{NC}{NA} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1}{2}$

Vì G là trọng tâm ΔACD nên $\dfrac{GE}{GA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow G \in NP$

Vậy MG, PI, NJ đồng phẳng.

b) Xét hai mặt phẳng (BCD) và (MIJ) thì K, I, H, J thuộc hai mặt đó $\Rightarrow$ K, I, H, J thẳng hàng.



PHẦN 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a, b trong không gian, các trường hợp xảy ra vị trí tương đối của a đối với b:

* *Cùng thuộc một mặt phẳng.*

- a cắt b tại điểm M. Kí hiệu $a \cap b = M$
- a song song với b. Kí hiệu a // b
- $a \equiv b$

* *a và b không thuộc một mặt phẳng.*

- Gọi a, b chéo nhau.

II. Tính chất

1. Qua một điểm ở ngoài đường thẳng chỉ vẽ được một đường thẳng duy nhất song song với đường thẳng cho trước.

2. Nếu 3 mặt phẳng đôi một cắt nhau thì ba giao tuyến đồng quy hoặc song song với nhau.

3. Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song với nhau thì giao tuyến của hai mặt phẳng:

- Hoặc song song với hai đường đó
- Hoặc trùng với một trong hai đường đó.

4. Hai đường thẳng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

5. Mọi kết quả trong hình học phẳng được thực hiện.

B. Các dạng bài toán tự giải

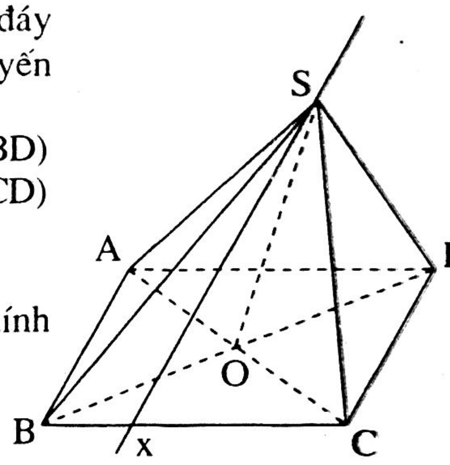
I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng sử dụng tính chất (3) và (4) để xác định

Bài 171. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng sau.

a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD)

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD)



Giải

a) (SAC) và (SBD) có điểm S chung.

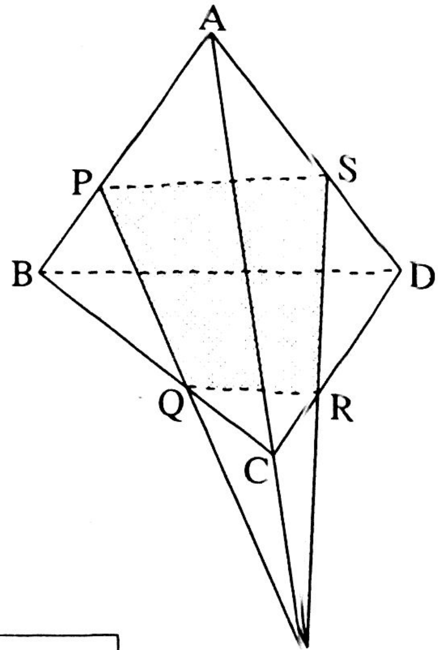
Vậy tìm điểm chung thứ 2 hoặc dựa vào tính chất (3), (4).

$BD \times AC = O$ (điểm thứ 2)

Vậy giao tuyến là SO.

b) (SAB) và (SDC) có cặp cạnh AB//DC và có điểm chung là S. Vậy giao điểm đi qua S và song song AB, (hoặc DC) là Sx//AB.

Bài 172. Cho tứ diện SABC. P, Q, R, S là bốn điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu bốn điển P, R, Q, S đồng phẳng thì PQ, SR, AC song song với nhau hoặc đồng quy.



Giải

Xét 3 mặt phẳng (PQRS), (SAB), (SBC)

$(PQRS)\times(SAB) = PQ$

$(PQRS)\times(SBC) = RS$

$(SAB)\times(SBC) = SB$

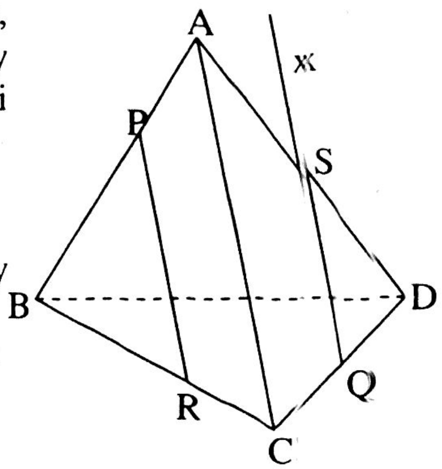
Vậy PQ, RS, SB đồng quy hoặc song song với nhau (theo tính chất).

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp chung:

- *Phát hiện hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng, sử dụng điều kiện hai đường thẳng song song trong mặt phẳng.*
- *Dùng tính chất: hai đường thẳng song song với đường thẳng thứ 3.*
- *Xét hai mặt phẳng chứa hai đường song song thì giao tuyến song song với hai đường đó.*

Bài 173. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mặt phẳng (PQR) với cạnh AD nếu PR // AC.



Giải

Xét hai mặt phẳng (PQR) và (ACD).

Hai mặt chứa PR và AC mà PR // AC. Vậy giao tuyến của hai mặt đó song song PR và AC.

Hai mặt đó có điểm chung Q. Vậy giao điểm $AD\times Qx = S$ (Qx // AC).

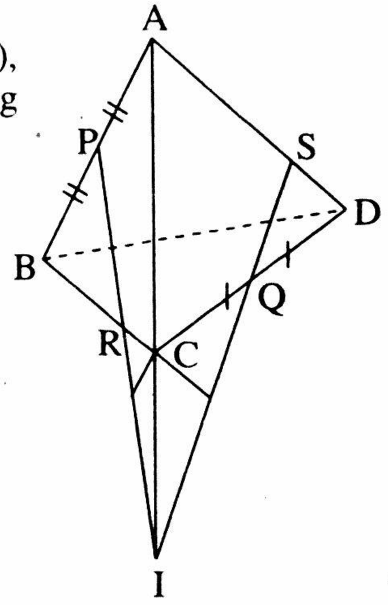
S là giao điểm $(PQR)\times AD = S$.

Bài 174. Cho tứ diện ABCD với P, Q lần lượt là trung điểm AB, CD. Gọi R là điểm nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC và S là giao điểm của cạnh AD với mặt phẳng (PQR).

Chứng minh rằng AS = 2SD.

Giải

Ta thấy $PR \times AC = I$ nên (PQR) cắt (ABC), (ACD) tạo thành ba giao tuyến PR, SQ, AC đồng quy tại I.



Trong mặt phẳng (ABC)

PA = PB; BR = 2RC (gt)

Kẻ CK//AB.

Trong mặt phẳng (ACD) có QC = QD (gt)

Kẻ CH//AD ta có:

Xét ΔRBP và $\Delta RKC \Leftrightarrow RC = \frac{1}{2}RB$ (gt)

$\Rightarrow KC = \frac{1}{2}BP \Leftrightarrow CK = \frac{1}{2}AP$

$\Leftrightarrow AC = CI \Rightarrow CH = \frac{1}{2}AS$

mà xét:

ΔCQH và $\Delta DQS \Rightarrow QC = QD \Rightarrow SD = CH \Rightarrow AS = 2SD$ (đpcm).

Dạng 3: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp chung:

- *Xét hai đường có thuộc một mặt phẳng hay không thuộc một mặt phẳng.*
- *Nếu thuộc một mặt phẳng: Cắt nhau, song song, trùng nhau.*
- *Nếu không thuộc một mặt phẳng thì a chéo b.*

Bài 175. Cho a, b là hai đường thẳng chéo nhau, A, B thuộc a; C, D thuộc b. Chứng minh AD và CB chéo nhau.

Giải

Giả sử AD và BC không chéo nhau nghĩa AD và BC thuộc một mặt phẳng P

Hay:

$AB \in P \rightarrow a \in P$

$CD \in P \rightarrow b \in P$.

Vậy a, b không chéo nhau trái với giả thiết nên AD, BC chéo nhau.

Bài 176. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Một đường thẳng c//a hai đường thẳng c và b có thể xảy ra vị trí tương đối nào.

Giải

c và b chỉ xảy ra: c chéo b hoặc c cắt b.

II. Bài tập tự giải

Bài 177. Cho tứ diện ABCD; M, N lần lượt trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm MN.

a) Chứng minh AG đi qua trọng tâm A' của ΔBCD. Phát biểu kết luận tương tự đối với BG, CG, DG.

b) Chứng minh GA = 3GA'.

Bài 178. Cho tứ diện ABCD; M, N, P, Q, R, S lần lượt các trung điểm cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh

c) MPNQ là hình bình hành

d) Chứng minh MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 179. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy và

$$\frac{AG}{AA_1} = \frac{BG}{BB_1} = \frac{CG}{CC_1} = \frac{DG}{DD_1} = \frac{3}{4}.$$

Bài 180. Cho tứ diện ABCD; I, J là trọng tâm tam giác ABC và ABD. Chứng minh IJ//CD.

Bài 181. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trọng tâm tam giác ΔBCD và ΔACD. Một điểm M trong không gian. Gọi M_1, M_2 đối xứng với M qua I, J. Chứng minh rằng: $BM_2 \times AM_1 = S$ và tỉ số $\frac{SM_2}{SB} = \frac{2}{3} = \frac{SM_1}{SA}$.

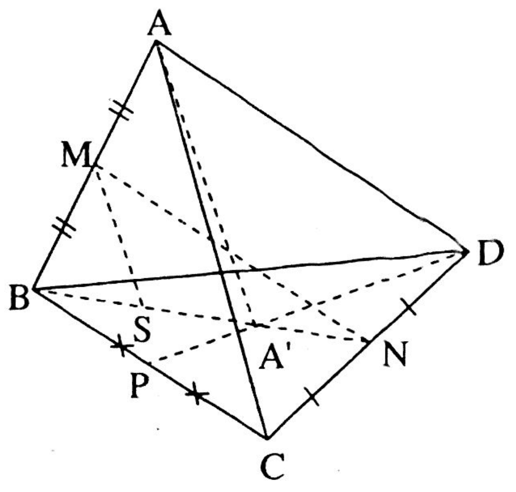
Bài 182. Cho tứ diện SABC. Trên SA lấy điểm M sao cho: $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, trên AC lấy điểm F thoả mản $\frac{SF}{FA} = \frac{1}{2}$. Trên SB lấy điểm N thoả mản $\frac{SN}{NB} = 2$.

Tìm thiết diện mặt (MNF) với hình tứ diện. Gọi E là giao điểm BC với (MNF). Tìm tỉ số $\frac{CE}{EB}$.

Bài 183. Cho hình chóp SABCD với ABCD là hình thang đáy là AD và BC. Biết AD =a; BC = b. Gọi I, J là trọng tâm tam giác SAD và SBC. Mặt (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh MN//PQ

b) Giả sử AM cắt BP tại E, CQ cắt DN tại F. Chứng minh EF//PQ//MN. Tìm EF theo a, b.



III. Hướng dẫn giải - đáp số

Bài 177.

Cách 1. Xét hai mặt phẳng (ABN) và (APD) cắt nhau theo giao tuyến AA'.

Xét ΔABN thì MN trung tuyến và $\frac{A'N}{BN} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow MN \times AA'$ tại điểm G. G là trung điểm của MN $\Rightarrow$ GA = 3GA'.

(theo bài 127)

Cách 2. Giả sử AG cắt mặt phẳng (BCD) tại A' ta chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD.

$A' \in BQ$.

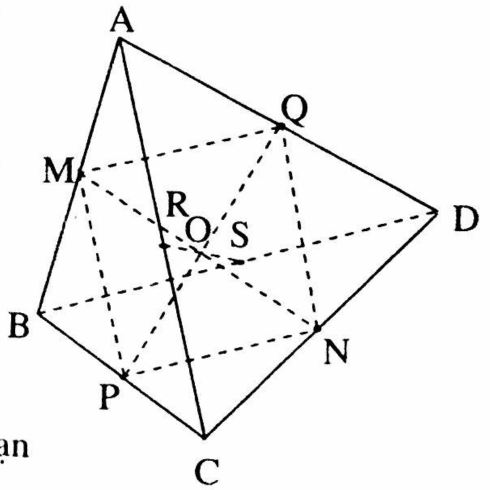
Kẻ $MS // AA' \Rightarrow GA' = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{4}AA'$ (1)

$\Rightarrow NA' = \frac{1}{2}A'B \Rightarrow NA' = \frac{1}{3}NB \Rightarrow$ A' là trọng tâm. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ A',A,G thẳng hàng, $GA' = \frac{1}{3}GA$ (đpcm).

Phát biểu tương tự: Gọi P, Q là trung điểm của BC, AD; G là trung điểm PQ. Chứng minh BG đi qua trọng tâm ΔACD.

Bài 178.



a)

$$\left.\begin{matrix} MP // AC \\ NQ // AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MP // QN$$

Tương tự:

$$\left.\begin{matrix} MQ // BD \\ NP // BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow MP // PN$$

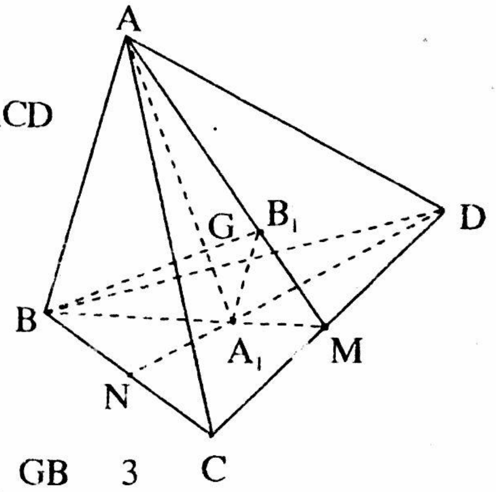
Vậy MPNQ là hình bình hành.

MN cắt PQ tại O là trung điểm của mỗi đoạn

b) Tương tự PQ và SR cắt nhau ở điểm O.

Vậy ba đường PQ, SR, MN đồng quy.

Bài 179.



Gọi A_1, B_1 là trọng tâm tam giác BCD và ACD

$$\frac{MA_1}{MB} = \frac{MB_1}{MA} = \frac{1}{3}$$

ΔABM; $AA_1 \times BB_1 = G$

Theo định lí Talet thì:

$$\frac{GA_1}{GA} = \frac{GB_1}{GB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA_1} = \frac{GB}{GB_1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{GA}{GA + GA_1} = \frac{GB}{GB + GB_1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{GA}{AA_1} = \frac{GB}{BB_1} = \frac{3}{4}$$

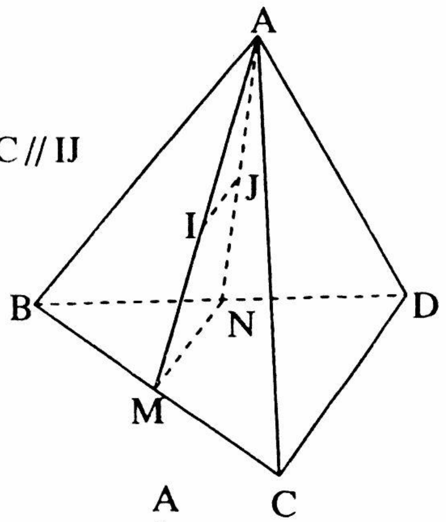
Tương tự ta chứng minh được: $\frac{GD}{DD_1} = \frac{GC}{CC_1} = \frac{3}{4}$ và các đường đó đồng quy tại G (đpcm).

Bài 180.

Xét trong mặt phẳng (AMN) và ΔAMN có:

$\frac{IA}{MA} = \frac{JA}{NA} = \frac{2}{3}$.

Theo định lí Talét IJ//MN mà $MN \,//\, DC \Leftrightarrow DC \,//\, IJ$ (cùng song song MN).



Bài 181.

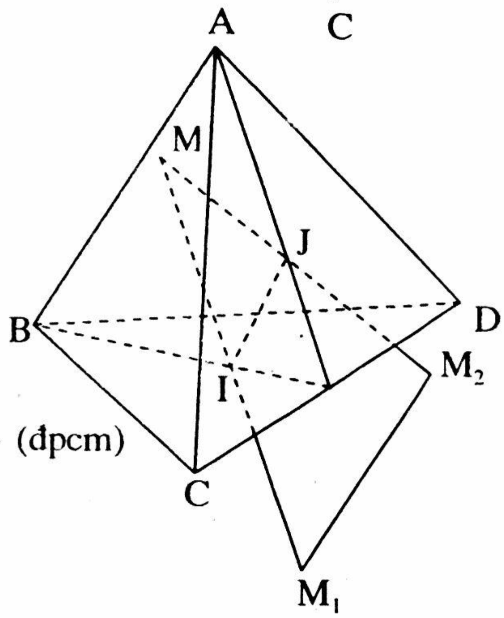
(Áp dụng bài 180)

$IJ//AB; \ \frac{IJ}{AB} = \frac{1}{3}$

$IJ \,//\, M_1M_2$ và $\frac{M_1M_2}{AB} = \frac{2}{3}$

Xét trong mặt phẳng ABM_1M_2

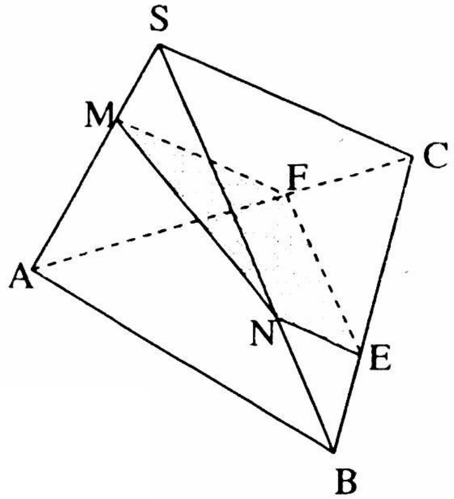
$\Rightarrow AM_1 \times BM_2 = S$ và $\frac{SA}{SM_1} = \frac{AB}{M_1M_2} = \frac{3}{2}$ (đpcm)



Bài 182.

Ta thấy MF//SC, vậy (SBC) cắt (MFN) theo giao tuyến đi qua N và NE//MF//SC.

Vậy $\frac{NB}{NS} = \frac{1}{2} = \frac{BE}{EC} \Leftrightarrow \frac{EC}{EB} = 2$



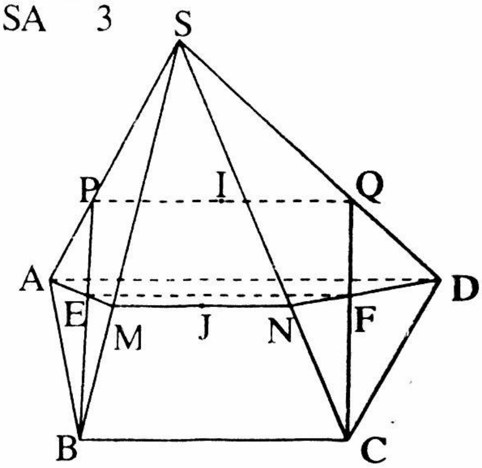
Bài 183.

a) $(AJD)\times(SBC)=MN$.

Ta có: $AD//BC \Leftrightarrow MN//BC//AD$.

$(BIC)\times(SAD)=PQ$ ta có $AD//BC \Rightarrow PQ//AD \Leftrightarrow MN//PQ$.

Vậy $\dfrac{JB}{BS}=\dfrac{CN}{CS}=\dfrac{AP}{AS}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{EP}{EB}=\dfrac{EM}{EA}=\dfrac{SP}{SA}=\dfrac{2}{3}$



$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{EM}{EA}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{FN}{FD}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Tương tự: $EF//PQ//BC$.

b) Xét hình thang AMND.

$\dfrac{EM}{EA}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{EN}{ED}$

Nối AN cắt EF tại K.

$EK=\dfrac{3}{5}MN$

$KF=\dfrac{2}{5}AD=\dfrac{2}{5}a$

mà $MN=\dfrac{2}{3}BC\Leftrightarrow MN=\dfrac{2}{3}b$.

Thay vào ta có: $EK+KF=EF=\dfrac{2}{5}b+\dfrac{2}{5}a=\dfrac{2}{5}(a+b)$.

PHẦN 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản

I. Vị trí tương đối đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) tuỳ theo điểm chung của d và mặt **phẳng** α.

- **Nếu d** và α không có điểm chung $\Rightarrow$ d//(α) hay (α) //d.
- **Nếu d** và α có một điểm chung duy nhất ta nói d cắt α.
- **Nếu d** và α có hai điểm chung thì ta nói $d \in \alpha$.

II. Tính chất

1. **Cho d** và (α); d không nằm trong (α) và d//d'$\in \alpha$ thì d//α

$$\begin{cases} d \notin \alpha \\ d // d' \in \alpha \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$

2. **Cho d//**(α) nếu mặt phẳng (β) chứa d. $(\beta) \times (\alpha) = d'$ thì d'//d.

$$\begin{cases} d // \alpha \\ d \in \beta \end{cases} \Rightarrow d' // d$$

3. **Nếu** α // d; β// d thì $\alpha \cap \beta$ = d ' thì d'//d.

$$\begin{cases} \alpha // d; \beta // d \\ \alpha \cap \beta = d' \end{cases} \Rightarrow d' // d$$

4. **Nếu hai** đường thẳng d_1 chéo d_2 có duy nhất một mặt phẳng (α) chứa d_1 song song với d_2.

$$\begin{cases} d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau} \\ \text{có duy nhất } \alpha \text{ chứa } d_1 \text{ và } \alpha // d_2 \end{cases}$$

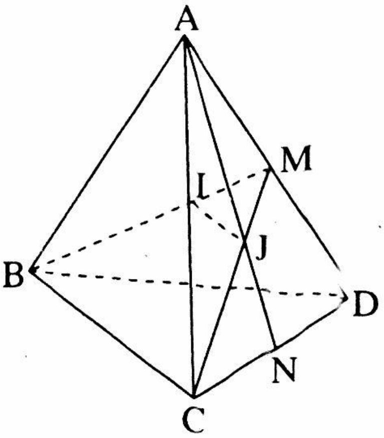
B. Bài tập

I. Bài tập mẫu.

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp chung:

- *Dựa và định nghĩa.*
- *Chứng minh:* $d // (\alpha) \Leftrightarrow d // d' \in (\alpha)$.
- *Chứng minh:* $d \in (\beta), (\beta) // (\alpha)$



Bài 184. Cho tứ diện ABCD. I, J lần lượt là trọng tâm ΔACD, ΔABD. Chứng minh IJ // (ABC).

Giải.

Gọi M là trung điểm của AD, $I \in BM$, $J \in CM$

Xét ΔBMC ta có:

$\frac{IM}{MB} = \frac{JM}{CM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ // BC$.

Mà $BC \in (ABC) \Rightarrow IJ // (ABC)$.

Bài 185. (Bài tập 1 SGK trang 79) Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng, có tâm O và O'.

a) Chứng minh OO'//(ADF) và (BCE)

b) M, N lần lượt là trọng tâm ΔABD và ΔABE. Chứng minh MN // (CEF).

Giải.

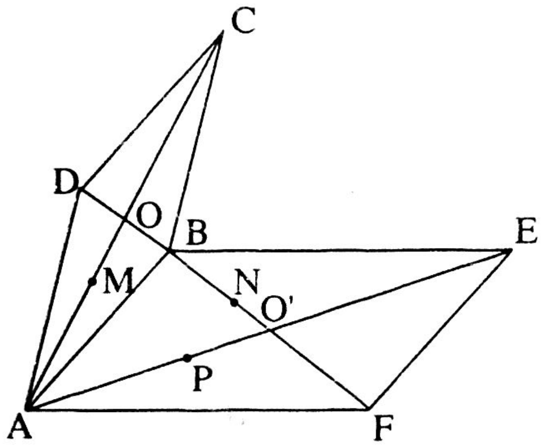
a) Xét ΔBEF có OO' là đường trung bình ⇒ OO'//DF mà DF ∈ (ADF)

⇒ OO'//(ADF) . (đpcm).

Tương tự xét ΔCAE có OO' là đường trung bình

⇒ OO'//CE mà CE ∈(BCE).

Vậy OO'//(BCE). (đpcm).



b) Xét trọng tâm M tam giác ABD và N trọng tâm tam giác ABE

$\Rightarrow \left\{ \frac{OM}{OA} = \frac{O'N}{OB} = \frac{1}{3} \right.$

Cách 1: Xét trọng tâm P tam giác ABF

$\Rightarrow \frac{O'P}{O'A} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow NP // AB \Rightarrow NP // EF \quad (1)$

Và xét ΔACE $\Rightarrow \frac{MA}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MP // CE \quad (2)$

Từ (1) và (2) ⇒ (MNP)//(CEF).

Cách 2: MN//(CEF)

Ta thấy mặt (CEF) trùng (DCEF); gọi R là trung điểm AB. M ∈ DR và N ∈ ER.

$\frac{MR}{DR} = \frac{NR}{ER} = \frac{1}{3}$

Vậy MN//DE ⇒ MN//(DCEF) (đpcm).

Dạng 2: Dựng một thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp chung:

- *Nếu* α *chứa đường thẳng a mà a //* (β) *thì* $\alpha \times \beta = b \Rightarrow a // b$.

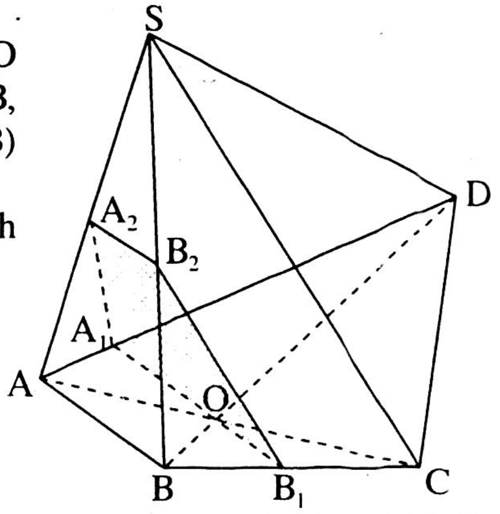
Bài 186. (Bài tập 2 SGK trang 74)

Cho hình chóp SABCD có **đáy là tứ giác** lồi. Gọi O là giao **điểm** của hai đường chéo AC và BD. **Xác định** thiết **diện** của hình chóp **đi** qua O, song song với AB và SC. Thiết **diện là hình** gì?.

Giải.

Gọi **mặt** phẳng chứa **thiết diện đi** qua O và song song AB nên cắt **mặt đáy** A_1B_1//AB, cắt mặt (SBC) tại B_1B_2//SC và cắt mặt (SAB) tại B_2A_2//AB. Vậy thiết diện $A_1B_1B_2A_2$.

A_1B_1//A_2B_2//AB nên thiết **diện** là hình thang.



Bài 186. (Bài tập 3 SGK trang 79).

Cho hình chóp SABCD, ABCD là một hình bình hành. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song BD, SA.

Giải.

Gọi mặt phẳng (β) cần dựng.

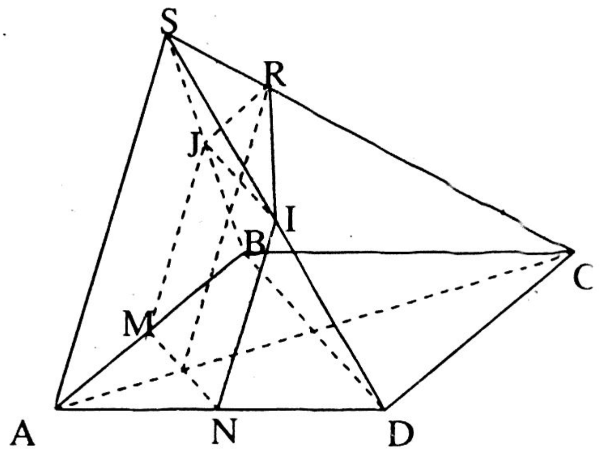
$(\beta)//BD \Leftrightarrow (\beta)\times(ABCD) = MN//BD;\quad N \in AD.$

$(\beta)//SA \Rightarrow (\beta)\times(SAD) = NP;\quad NP//SA$ với $I \in SD$

$(\beta)//BD \Leftrightarrow (\beta)\times(SBD) = IJ//BD$

$(\beta)//SC \Leftrightarrow \beta\times(SAC) = LR//SA$ với $R \in SC$.

Vậy thiết diện đó MNIRJ (MNIJ là hình bình hành).



II. Bài tập tự luyện.

Dạng 1:

Bài 187. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB; I là trung điểm của AB. Lấy M thuộc AD sao cho AD = 3AM.

a) Tìm giao tuyến (SAD) và (SBC).

b) Đường thẳng đi qua M song song AB cắt CI tại N. Chứng minh NG//(SCD).

c) Chứng minh rằng MG//(SCD).

Bài 188. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' điểm E chia DB theo tỉ số 1/3, điểm F chia B'A theo tỉ số 1/3. Chứng minh EF//(A'B'CD).

Bài 189. (Bài tập 4 SGK trang 79) Cho tứ diện ABCD xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng α đi qua trọng tâm G của tam giác ABC đồng thời song song với AD và BC.

Bài 190*. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Một điểm M không nằm trên a và b. Chứng minh rằng chỉ có một mặt phẳng P chứa M song song với a và b.

Bài 191. Cho hai đường thẳng a, b và một điểm M không thuộc a, b. Dựng đường thẳng c đi qua M cắt a và b.

Bài 192. Cho tứ diện ABCD, một điểm M thuộc cạnh BC dựng thiết diện chứa điểm M song song AB và CD. Thiết diện là hình gì?.

Bài 193. Cho tứ diện SABC. M là điểm tuỳ ý trên cạnh SB.

a) Dựng thiết diện đi qua M và song song SA, SB. Thiết diện là hình gì?

b) Xác định vị trí của M để thiết diện là hình thoi.

c) Xác định M để diện tích thiết diện lớn nhất.

III. Hướng dẫn giải.

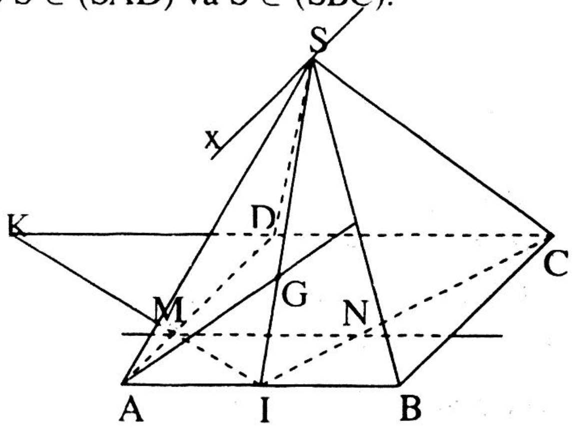
Bài 187.

a) (SAD) và (SBC) có AD//BC và có $S \in (SAD)$ và $S \in (SBC)$.

Nên giao tuyến:

$$(SAD) \cap (SBC) = Sx.$$

$$Sx // AB // BC$$



b) Chứng minh GN//(SCD).

$$MN//AB//CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$$

Vì G là trọng tâm nên: $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3}$

$$\text{Xét } \Delta SIC: \Leftrightarrow \frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GN // SC$$

c) Cách 1:

Nối $MI \times DC = K$.

Ta thấy: $KD // AI \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MI}{IK} = \frac{1}{3}$

Xét ΔSKI ta có: $\frac{MI}{IK} = \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow MG // SK$

$SK \in (SDC) \Rightarrow MG // (SDC)$ (đpcm).

Cách 2: Xét (MGN) và (SDC) có: $\begin{cases} GN // SC \\ MN // DC \end{cases}$ (theo a) $\Rightarrow (MGN) // (SDC$

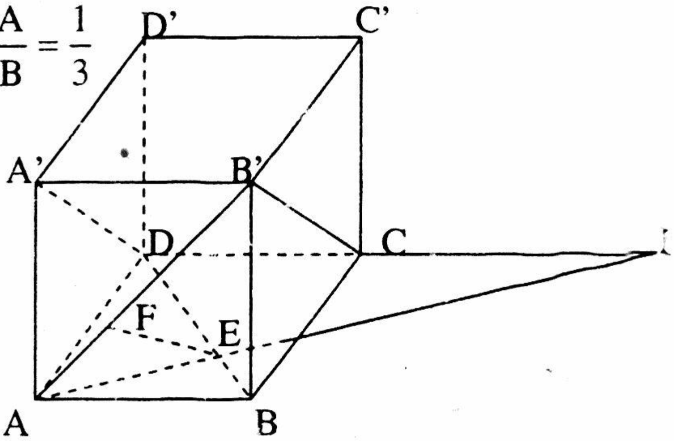
$\Rightarrow MG // (SDC)$.

Bài 188.

Cho hình ABCDA'B'C'D' là hình hộp lập phương

E chia BD theo tỉ số 1/3 $\Leftrightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{1}{3}$

F chia BD theo tỉ số 1/3 $\Leftrightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{1}{3}$



Chứng minh EF//(A'B'CD).

Nối AE cắt DC tại K.

Xét 2 tam giác AEB và BEK

$\Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{KE} = \frac{1}{3}$

Xét tam giác AB'K ta có:

$\frac{AF}{B'F} = \frac{AE}{KE} = \frac{1}{3} \Rightarrow FE // B'K$

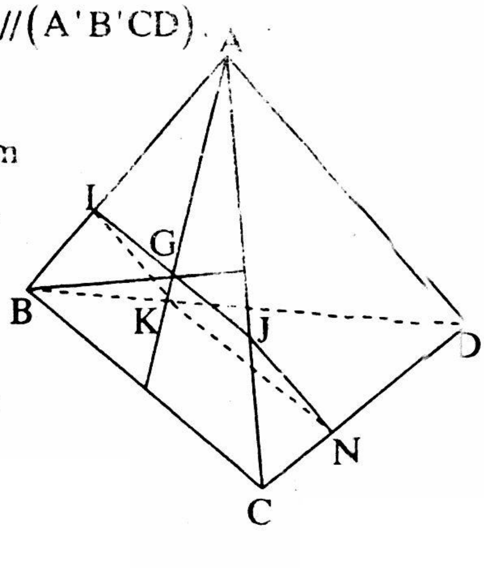
Mà $B'K \in A'B'CD \Leftrightarrow EF // (A'B'CD)$ (đpcm).

Cách 2: Qua E kẻ EN // AB. Xét mặt phẳng (A'B'CD) và (NEF) ta có:

$\frac{NA}{ND} = \frac{FA}{FB'} = \frac{1}{3}$ (theo định lí Talet)

$\left.\begin{matrix} NF // DB' \\ NE // DC \end{matrix}\right\} \Rightarrow (NFE) // (A'B'CD) \Rightarrow EF // (A'B'CD)$.

Bài 189.



Dựng thiết diện (α) chứa G trọng tâm ΔABC và song song với AD, BC.

$(\alpha) \times (ABC) = Gx$ (Vì $G \in (ABC)$)

$Gx // BC \Rightarrow Gx \times AB = I$; $Gx \times AC = J$

IJ//BC.

Mặt $(\alpha) // AD \Leftrightarrow (\alpha) \times (ACD) = Jy // AD$

Vì $J \in (ACD)$; $Jy \times CD = N$.

Và $Nz // BC$; $Nz \times BD = K$.

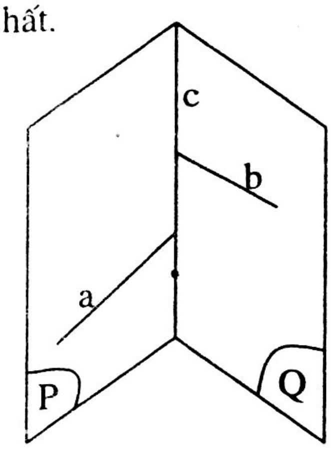
Tứ giác IKNJ thiết diện cần dựng.

Bài 190.

a, b chéo nhau $M \notin a$, $M \notin b$.

Qua M kẻ đường thẳng a'//a, b'//b. Vì a, b chéo nhau nên a', b' phân biệt và có duy nhất a', b' nên mặt phẳng chứa a', b' duy nhất.

Bài 191.



Cách 1:

Dựng P chứa a và M. Dựng Q chứa b và M.

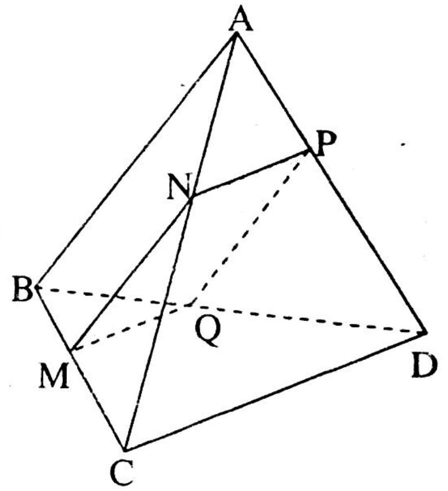
$P \times Q = C$ đi qua M.

Cách 2:

Qua a và M dựng P. Lấy $b \times P = N$ trong P.

Đường MN là đường cần dựng.

Bài 192.



Cho ABCD và $M \in BC$.

Gọi thiết diện là (α).

$(\alpha) \times (ABC) = Mx // AB$.

$Mx \times AC = N$

$(\alpha) \times (ACD) = Ny // CD$.

$Ny \times AD = P$

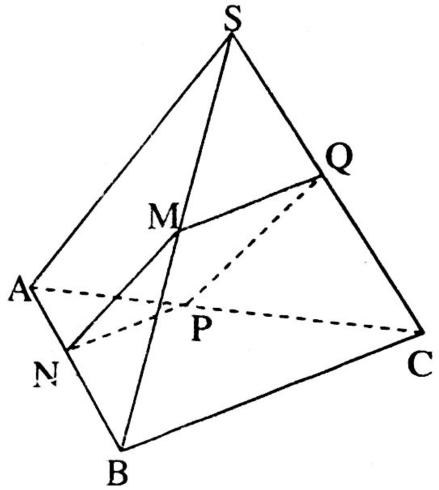
$(\alpha) \times BCD = Mz // CD$.

$Mz \times BD = Q$

PQ//AB.

Vậy thiết diện MQPN là hình bình hành.

Bài 193.



a) Dựa vào bài 192.

b) Giả sử MNQP là hình thoi.

Theo định lí Talet ta có:

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{SM}{SB} \Leftrightarrow MQ = \frac{BC.SM}{SB}$$

$$\frac{MN}{SA} = \frac{MB}{SB} \Leftrightarrow MN = \frac{SA.MB}{SB}$$

Vì MNPQ là hình thoi thì MN = MQ

$\Leftrightarrow BC.SM = SA.MB = SA\left(SB - SM\right) \Leftrightarrow SM = \dfrac{SA.SB}{BC + SA}$

(Đẳng thức dựng được SM).

Dựng đoạn $BC + SA = a$. Dựng đoạn tỉ lệ thứ tự

$SM = \dfrac{SA.SB}{a}$

c) Diện tích MNPQ là hình bình hành.

$S_{MNPQ} = MN.NP.\sin\widehat{MNP} = MN.NP.\sin\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right)$.

Vậy S_{MNPQ}max $\Leftrightarrow$ MN.NPmax

$\Leftrightarrow \dfrac{MN}{SA}.\dfrac{NP}{BC}$max mà:

$\dfrac{MN}{SA} + \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{SM}{SB} + \dfrac{MB}{SB} = 1 \Leftrightarrow MN.NP\max \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{MB}{SB} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy M là trung điểm của SB.

PHẦN 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản

I.Định nghĩa:

Hai mặt phẳng α, β được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Kí hiệu:

$$\alpha // \beta \text{ hoặc } \beta // \alpha$$

$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \phi$$

II. Tính chất.

1. Nếu mặt phẳng α chứa hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 và hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng β thì $\alpha // \beta$.

Tóm tắt: $\begin{cases} d_1 \in \alpha; \quad d_2 \in \alpha \\ d_1 \cap d_2 = \{I\} \\ d_1 // \beta; \quad d_2 // \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$

2. Qua một điểm ở ngoài mặt phẳng đã cho có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng đã cho.

3. Qua một đường thẳng d song song với mặt phẳng α có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng α.

Tóm tắt: $d // \alpha; \exists \beta; \begin{cases} \beta \supset d \\ \beta // \alpha \end{cases}$

4. Hai mặt phẳng phân biệt α và β cùng song song với γ thì $\alpha // \beta$.

Tóm tắt: $\begin{cases} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$ và $\alpha // \beta // \gamma$

5. Một điểm A không thuộc mặt phẳng α. Mọi đường thẳng d đi qua A; $d // \alpha$ thì d thuộc một mặt β chứa A, $\beta // \alpha$.

Tóm tắt: $\begin{cases} A \notin \alpha \\ A \in d; d // \alpha \Rightarrow d \in \beta; \\ A \in \beta; \beta // \alpha \end{cases}$

6. Cho hai mặt phẳng α và β song song với nhau. Nếu một mặt phẳng γ cắt α theo giao tuyến d_1, cắt β theo giao tuyến d_2 thì $d_1 // d_2$.

Tóm tắt: $\begin{cases} \alpha // \beta \\ \gamma \times \alpha = d_1 \\ \gamma \times \beta = d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 // d_2$

7. Định lí Talet.

a) Định lí thuận: Cho 3 mặt phẳng $\alpha // \beta // \gamma$. Chúng cắt lần lượt hai đường thẳng d_1, d_2 theo thứ tự ABC, A'B'C' thì $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ (1)

Tóm tắt: $\begin{cases} d \times \alpha = A; & d' \times \alpha = A' \\ d \times \beta = B; & d' \times \beta = B' \\ d \times \gamma = C; & d' \times \gamma = C' \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta // \gamma \Rightarrow (1)$

b) Định lí đảo: d, d' chéo nhau

A, B, C $\in$ d; A',B',C' $\in$ d'. Sao cho B nằm giữa AC; B' nằm giữa A'C' và $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$. Khi đó AA', BB', CC' cùng song song với một mặt phẳng.

II. Hình lăng trụ và hình hộp.

1. *Hình lăng trụ.*

Cho hai mặt $\alpha // \beta$. Trên mặt phẳng α cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$.

Qua các đỉnh $A_1A_2...A_n$ vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt β tại $A'_1A'_2...A'_n$. Hình miền gồm hai miền $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và n miền hình bình hành $A_1A'_1$ $A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$,..., $A_nA'_nA_1A'_1$, được gọi là hình láng trụ kí hiệu: $A_1A_2...A_n$,$A'_1A'_2...A'_n$.

- Lăng trụ có đáy $A_1A_2A_3A_4$,) là hình bình hành gọi là hình hộp.
- Lăng trụ có các mặt bên và hai mặt đáy là hình chữ nhật là hình hộp chữ nhật.
- Lăng trụ có đáy là hình vuông và các mặt bên là hình vuông gọi là hình lập phương.

B. Bài tập.

I. Bài tập mẫu:

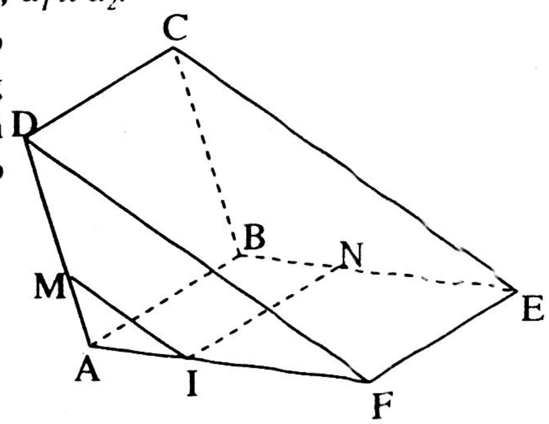
Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng $\alpha // \beta$.

Phương pháp giải:

- *Vận dụng tính chất 1 và 4*
- *Sử dụng chính α chứa $d_1 // \beta$ chứa $d_2 // \beta$; d_1 x d_2.*

Bài 194. (Bài số 1 SGK trang 84). Cho hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N hai điểm di động trên AD và BE sao cho: $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BN}{EN}$.

Chứng minh MN song song một mặt phẳng cố định.



Giải.

Kẻ NI //AB//EF ta có:

$$\frac{AI}{IF}=\frac{BN}{EN}=\frac{AM}{DM}\Rightarrow MI\,//\,DF;\ NI\,//\,EF$$

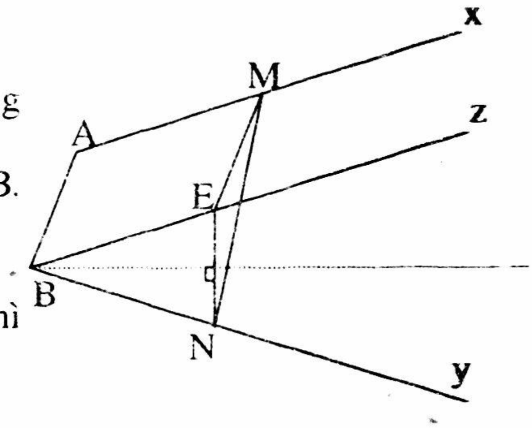
$$\Leftrightarrow (MIN)\,//\,(DCEF)\Rightarrow MN\,//\,(DCEF)\text{ cố định. (đpcm).}$$

Bài 195. (Bài tập 2 SGK trang 89). Cho hai điểm M, N di **động trên hai** nửa đường chéo nhau Ax và By.

a) Hãy chỉ ra một mặt phẳng (P) chứa By song song với **Ax.Từ M kẻ** đường thẳng song song với AB cắt mặt phẳng P tại E. Tìm tập **hợp E**.

b) Khi M, N di động sao cho AM = BN. Chứng minh MN **song song với** mặt phẳng cố định.

Giải.



Xác định mặt phẳng (P) chứa Bx và song song Ax.

Xác định mặt phẳng (Q) chứa Ax và B. Trong (Q) vẽ Bz // Ax.

Mặt phẳng (P) xác định By, Bz

M $\in$ Ax. Kẻ ME//AB cắt (P) tại E thì BE//Ax.

Vậy E $\in$ Bz.

AM = BN; M $\in$ Ax; N $\in$ Bz nên BE = BN.

Vậy $NE \perp BK$, BK là đường phân giác $\widehat{yBz}$.

Trong mặt phẳng (P) kẻ $Bm \perp BK$; MN // (ABm) cố định.

Thật vậy $EN \perp BK \Rightarrow EN\,//\,Bm;\ EM\,//\,AB$

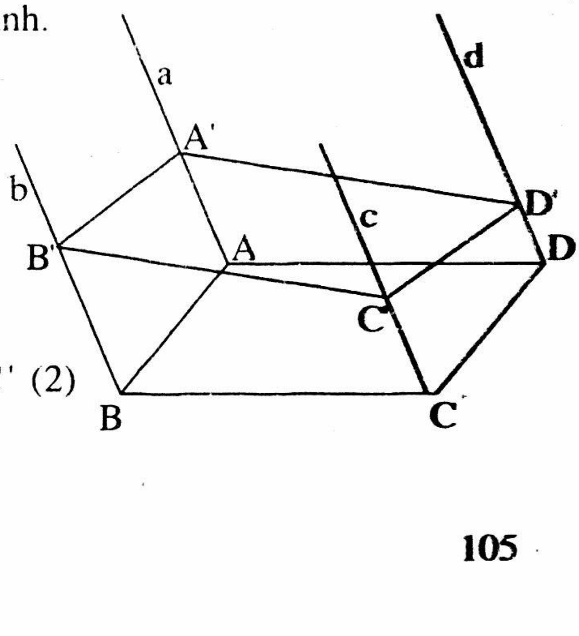
$$\Rightarrow (EMN)\,//\,(ABm) \Leftrightarrow MN\,//\,(ABN)$$

Bài 196. (Bài tập số 3 trang 89). Trong mặt phẳng α cho **một hình bình** hành ABCD. Qua A, B, C, D vẽ 4 đường thẳng a, b, c, d song **song với nhau** không nằm trên (α). Trên a, b và c lấy lần lượt A', B', C' tuỳ ý.

a) Hãy xác định D' $\in$ d là giao của d với (A'B'C').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

Giải.



a) Xét các mặt phẳng (A'B'C') và mặt phẳng (a,b), (c,d)

$(a,b)//(c,d) \Leftrightarrow (A'B'C')\times(a,b)=A'B'$

$\Leftrightarrow A'B'//C'D'$ (1)

b) Mặt:

$$\left.\begin{array}{l}(A'B'C')\times(a,d)=A'D'\\(A'B'C')\times(b,c)=B'C'\end{array}\right\}\Rightarrow A'D'//B'C'\ (2)$$

Vậy A'B'C'D' là hình bình hành.

Dạng 2: Sử dụng định lí Talet để chứng minh một số tính chất hình.

Phương pháp chung:

Đưa bài toán về dạng hình học phẳng, xét các tính chất trên hình học phẳng, sử dụng định lí Talet để chứng minh.

Bài 197. Cho hình lăng trụ tam giác ABCA'B'C', các cạnh bên là AA', BB', CC'. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm cạnh BC, B'C'.

a) Chứng minh AM song song A'M'

b) Tìm giao điểm của mặt (AB'C') và đường A'M.

c) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

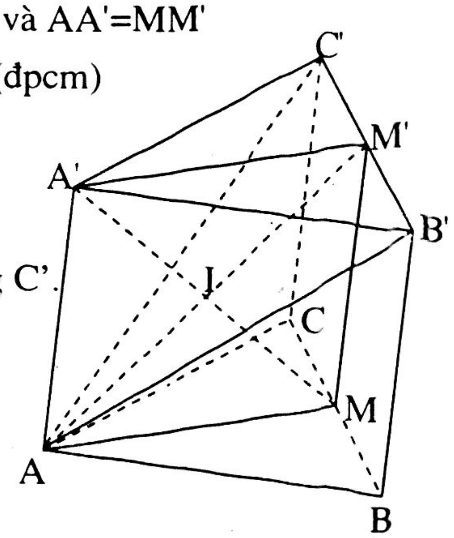
Giải.

a) Chứng minh AM//A'M'.

Xét hình bình hành CBB'C'

$\Leftrightarrow MM'//BB' \Leftrightarrow MM' = BB' \Rightarrow AA'//MM'$ và $AA'=MM'$

$\Leftrightarrow AA'M'M$ là hình bình hành $\Leftrightarrow A'M'//AM$ (đpcm)



b) Xét hình bình hành A'AMM'.

AM' $\in$ (AB'C')

$A'M \times AM' = I$; $A'M \times (ABC') = I$.

c) Xét (AB'C') và (BA'C') có một điểm chung C'.

Tìm điểm chung thứ 2.

Xét trong hình bình hành ABB'A'.

$$\begin{matrix} AB' \in (AB'C') \\ A'B \in (BA'C') \end{matrix} \Leftrightarrow AB' \times A'B' = N$$

Vậy giao tuyến là C'N (Hình vẽ).

Bài 198. Cho tứ diện ABCD cắt tứ diện bởi thiết diện MNEF với M, N, E, F lần lượt nằm trên cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA} = 1$.

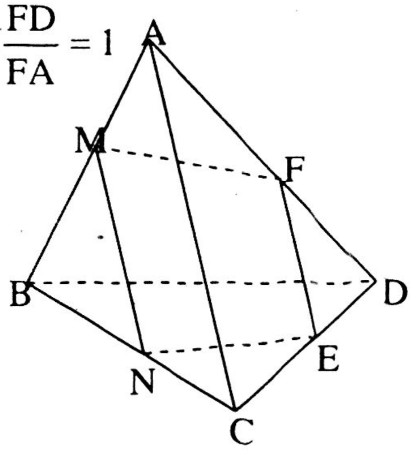
Giải.

Cách 1:

Trường hợp 1: MN//EF//AC

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB}; \frac{EC}{ED} = \frac{FA}{FD} \Rightarrow \frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA} = 1$

Trường hợp 2: $MN \times EF = O$



Theo tính chất giao tuyến của mặt phẳng **(ABC)**, (ACD) và (MNEF) thì MN, AC, EF cắt nhau ở O.

Kẻ CI//AB; CJ//AD.

$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{CI}; \frac{OC}{OA} = \frac{OI}{MA}$

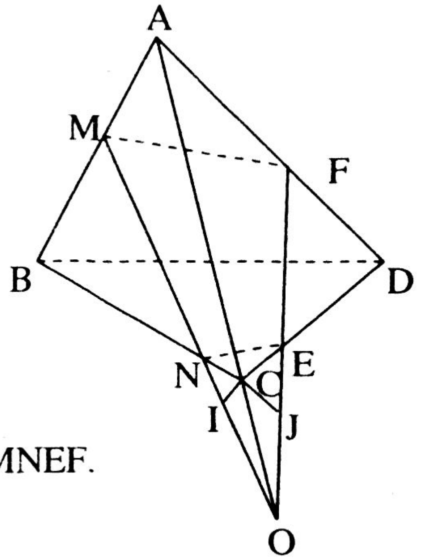
$$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{OC}{OA}=1 \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA}.\frac{OA}{OC}=1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA}=1 \text{ (đpcm).}$$



Cách 2: Dùng định lí Ta lét:

Dựng 4 mặt phẳng song song với mặt phẳng MNEF.

Cắt bởi 5 mặt phẳng trên bởi đường thẳng Δ.

Mặt phẳng qua A cắt Δ tại A'

Mặt phẳng qua B cắt Δ tại B'

Mặt phẳng qua C cắt Δ tại C'

Mặt phẳng qua D cắt Δ tại D'

Mặt phẳng qua (MNEF) cắt Δ tại O.

Theo định lí Talet ta có:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{OA}{OB'}$$

$$\frac{NB}{NC}=\frac{OB'}{OC'}$$

$$\frac{EC}{ED}=\frac{OC'}{OD'}$$

$$\frac{FD}{FA}=\frac{OD'}{OA}$$

$$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA}=1 \text{ (đpcm)}$$

II. Bài tập luyện tập

Phần 1. Bài tập trắc nghiệm.

Bài 1. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Mặt phẳng P song song với a thì cũng song song với b

b) Mặt phẳng P cắt đường thẳng a thì không cắt b

c) Mặt phẳng P song song với a thì mặt phẳng P hoặc song song với b hoặc chứa b

d) Mặt phẳng P cắt a thì P cắt b.

Bài 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai mặt phẳng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

b) Hai mặt phẳng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

c) Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì song song với mặt phẳng còn lại.

d) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Bài 3. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.

b) Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì song song với mọi đường thẳng trong mặt phẳng đó.

c) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì song song với các đường thẳng trong mặt phẳng kia.

d) Hai đường thẳng cắt hai mặt phẳng song song với nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

Bài 4. Cho hình chóp SABCD, ABCD là tứ giác lồi. Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng α bất kỳ với hình chóp không thể có:

a) Ngũ giác   b) Tứ giác   c) Tam giác   d) Lục giác

Bài 5. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 phân biệt cùng nằm trong mặt phẳng. Có bao nhiêu vị trí tương đối hai đường thẳng đó?

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. M, N, P, Q, R, S lần lượt các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, AC, BD. Bốn điểm nào sau đây tạo thành hình bình hành?

a) M, N, P, Q   b) R, S, M, N   c) R, S, P, Q   d) R, P, M, N

Bài 7. Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng.

a) Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

c) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

d) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

Bài 8. Cho d_1, d_2 chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa d_1 song song với d_2?

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4

Bài 9. Cho tứ diện ABCD, điểm M thuộc AC. Một mặt phẳng song song BC và AD cắt tứ diện có thiết diện là:

a) Hình thang   b) Hình bình hành

c) Hình chữ nhật   d) Hình vuông

Bài 10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) $(\alpha)//(\beta)$ và $d_1 \in (\alpha)$; $d_2 \in (\beta) \Rightarrow d_1//d_2$

b) $(\alpha)//(\beta)$ và $d_1 // (\alpha)$; $d_2 // (\beta) \Rightarrow d_1//d_2$

c) $(\alpha)//(\beta)$ và $d_1 \in (\alpha) \Rightarrow d_1//(\beta)$

d) $d_1//d_2$ và $d_1 \in (\alpha)$; $d_2 \in (\beta) \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$.

Phần 2. Bài tập tự luyện.

Một số chú ý khi giải toán tự luyện

1. Chứng minh đường thẳng a song song với một mặt phẳng (P) bằng các cách sau:
   - Chứng minh a// d (d bất kì thuộc P) và mặt phẳng (P) không chứa a.
   - Chứng minh $a \in Q$ mà Q//P.
2. Chứng minh a//b. (Hai đường thẳng song song)
   - b là giao tuyến của mặt phẳng P mà P // a với mặt phẳng Q chứa a
   - Chứng minh b là giao tuyến (P) và (Q) mà a//P; a//Q.
   - a và b giao tuyến của hai mặt phẳng P//Q với mặt phẳng R chứa a và b.
3. Chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau P//Q
   - Chứng minh P chứa 2 đường thẳng d_1 x d_2; d_1//(Q) và d_2 //(Q)
   - Chứng minh $d_1, d_2 \in P$, $d_1', d_2' \in Q$; d_1 x d_2; d_1' x d_2' và $d_1//d_1'$; d2//d2' thì (P)//(Q)
   - Có thể dùng phương pháp chứng minh.
4. Cho a, b, c chéo nhau từng đôi một. Tìm hai điểm $M \in a$; $N \in b$ sao cho MN song song với C.

Thì phương pháp tìm:

Mặt (α) chứa a song song với c

Mặt (β) chứa b song song với c.

(α) x (β) = d; d//c

d x a = A; d x b = B cần tìm.

Bài 199. Cho hai hình vuông ABCD, ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M', N'.

a) Chứng minh (ADF)//(ACE).

b) Chứng minh M'N' // DF.

c) Chứng minh rằng (DEF)//(MM'NN'); MN//(DEF).

Bài 200. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AA_1 và BC sao cho $\frac{MA_1}{MA} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2}$. P là trung điểm CC_1. Tìm giao điểm đường thẳng đi qua P và song song với MN với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

Bài 201. Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a) Chứng minh mặt phẳng (BDC_1) song song với mặt phẳng (AB_1D_1).

b) Gọi M, N là trung điểm của các cạnh AD và C_1D_1. Chứng minh rằng $MN//(BC_1D)$.

Bài 202. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có một cặp mặt phẳng duy nhất song song với nhau, mỗi cặp đi qua một trong hai đường thẳng đó.

Bài 203. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau. Có hay không đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c.

Bài 204. Cho hình chóp $SA_1A_2... A_n$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $A_1A_2... A_n$, cắt $SA_1SA_2...SA_n$ tại các điểm $A'_1A'_2... A'_n$. Thì $A'_1A'_2...A'_n$ và $A_1A_2... A_n$ có nhận xét gì.

Bài 205. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Một điểm M thuộc AD' và N thuộc DB sao cho AM = DN = x ($0 < x < a\sqrt{2}$). Chứng minh rằng khi x biến thiên thì MN luôn song song với mặt phẳng (A'D'CB).

Bài 206. Cho hình chóp SABC đỉnh S và O là điểm thuộc mặt đáy ABC. Qua O vẽ các đường OA', OB', OC' lần lượt song song SA, SB, SC. Trong đó A'B'C' lần lượt thuộc các mặt bên SBC, SCA, SAB.

Chứng minh rằng: $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1$.

Bài 207. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của các cạnh AB, BB', C'D'. Chứng minh (MNP)//(BDC').

Dạng toán dựng hình và quỹ tích trong không gian (Bài tập nâng cao)

Bài 208. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Dựng đường thẳng cắt AC' và BA' đồng thời song song với đường thẳng $B_1'D_1'$.

Bài 209. Cho tứ diện SABC đều. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, SB. Trên đường AS và CN chọn P, Q sao cho PQ//BM. Hãy tính độ dài PQ biết các cạnh tứ diện bằng 1.

Bài 210. Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tìm M trên AC_1, N trên B_1D_1 sao cho:

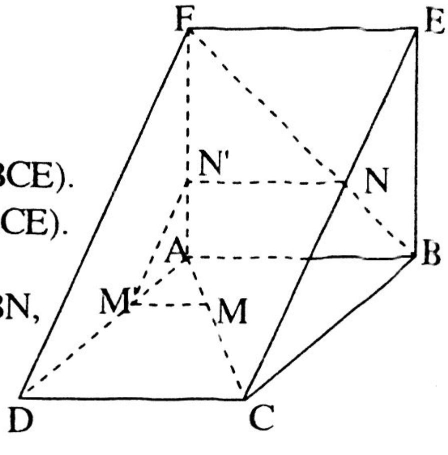
$MN//A_1D$. Tính tỉ số $\frac{MC_1}{MA}$

III. Hướng dẫn giải - đáp số

Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
c, d	**b**	**a**	**d**	**b**	**a**	**c**	**a**	**b**	**c**

Bài tập tự luyện



Bài 199.

a) Chứng minh: (ADF)//(BCE).

Thật vậy: AF ∈ (ADF); AF //BE ⇒ AF // (BCE).

Tương tự: AD ∈ (ADF); AD//BC ⇒ AD//(BCE).

Vậy (ADF)//(BCE).

b) ABCD, ABEF là hình vuông nên: AM = BN, AC = BF.

$\Rightarrow MM'//CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (1)

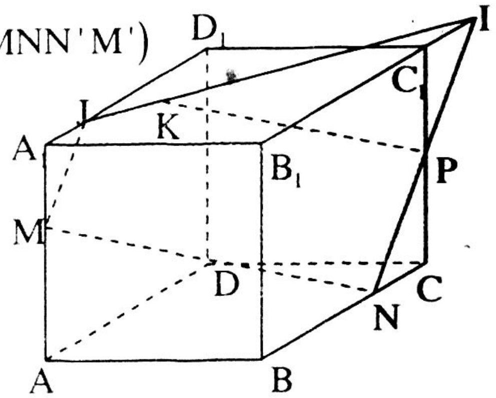
$NN'//AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$

$\Leftrightarrow M'N'//DF$ (3)

c) Thật vậy: Từ (1) và (2) $\Rightarrow (DCF)//(MNN'M')$

Mà $MN \in (MNM'N') \Rightarrow MN //(DCF)$.



Bài 200.

Xét mặt phẳng MNP

(MNP) chứa $NP \times B_1C_1 = I$

$NP//AA_1D_1D$

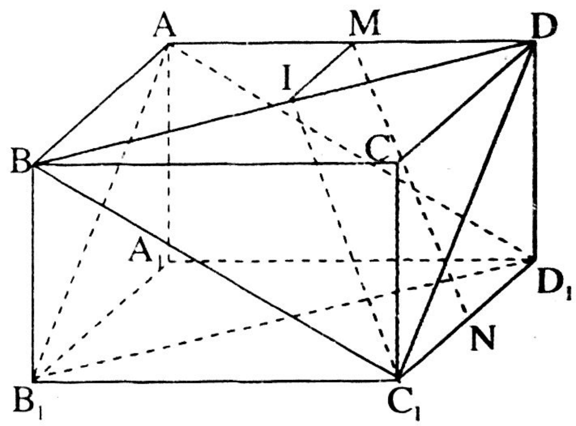
$\Leftrightarrow (MNP)\times(AA_1D_1D) = MJ // NP$

$MJ \times A_1D_1 = J$

$\Rightarrow (A_1B_1C_1D_1)\times(MNP) = IJ$

Vậy kẻ PL //MN; PL x IJ = K (giao điểm cần tìm).

Bài 201.



a) (BDC_1) chứa BD, BC_1

(AB_1D_1) chứa B_1D_1, AD.

Mà $BD//B_1D_1$; $BC_1//AD_1$

$\Rightarrow (BDC_1)//(AB_1D_1)$

b) *Cách 1:*

M là trung điểm AD

N là trung điểm C_1D_1

Gọi I là trung điểm BD;

do ABC_1D_1 là hình bình hành:

$\Rightarrow AB // C_1D_1$ và $AB=C_1D_1$ mà $MI//AB$; $MI= \frac{1}{2}AB$

và $MI // C_1D_1$; $MI = \frac{1}{2}C_1D_1 = C_1N$.

Vậy MIC_1N là hình bình hành $\Leftrightarrow MN // C_1I \Rightarrow MN // (BC_1D)$ vì $C_1I \in (BC_1D)$.

Cách 2: Sử dụng định lí Talet đảo.

Bài 202. Giả sử b' x a và b'// b; a' x b và a' // a.

Khi đó (a, b') // (b, a').

Giả sử có (P) chứa a và (P) song song b thì khi đó (P) chứa b'

$\Rightarrow P \equiv (a, b')$ (1).

Giả sử có (Q) chứa b song song a thì Q chứa a' $\Rightarrow Q \equiv (b, a')$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ P và Q duy nhất.

Bài 203. Cho a, b, c chéo nhau

(Q) chứa a và chứa $M \in c$.

(P) chứa b và chứa $M \in c$.

Lấy M thuộc c. Có giao tuyến đi qua M cắt cả a và b. Vậy Δ đi qua M cần tìm cắt cả a, b, c.

Vậy có vô số.

Bài 204.

Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$.

Mặt phẳng $(\alpha)// (A_1A_2...A_n)$.

Nên $A_1A_2A_1'A_2$ là hai giao tuyến 2 mặt phẳng song song với mặt SA_1A_2 $\Rightarrow A_1A_2 // A_1'A_2'$

Và ta có: $\dfrac{SA_1'}{SA_1} = \dfrac{A_1'A_2'}{A_1A_2}$

Tương tự: $\dfrac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \dfrac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = ... = \dfrac{A_n'A_1'}{A_nA_1}$.

Bài 205.

Cách 1: Các đường chéo hình hộp: $AD' = BD = a\sqrt{2}$.

$AM = BN = x \Rightarrow \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{MD'}{MA} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{x}$

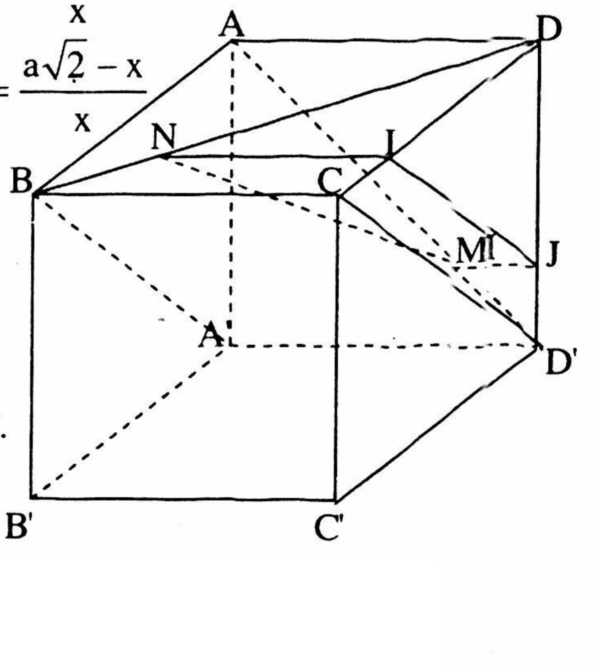
Vậy theo định lí Talet đảo suy ra MN song song với mặt phẳng chứa BD' và song song AD. Đó chính là mặt phẳng: (A'D'BC).

Cách 2:

Từ N kẻ $NI // BC$ (1) $\Rightarrow \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{CI}{DI} = \dfrac{A\sqrt{2} - x}{x}$

Từ M kẻ $MJ // A'D' \Rightarrow \dfrac{MD'}{MA} = \dfrac{JD'}{JD} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{x}$

Vậy xét trong Δ DCD' có: $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{JD'}{JD} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{x}$



Vậy IJ//CD' (2).

Xét mặt phẳng (NIJMJ) và (A'D'CB)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (NIJM)//(A'D'CB)

$\Rightarrow$ MN//(A'D'CB).

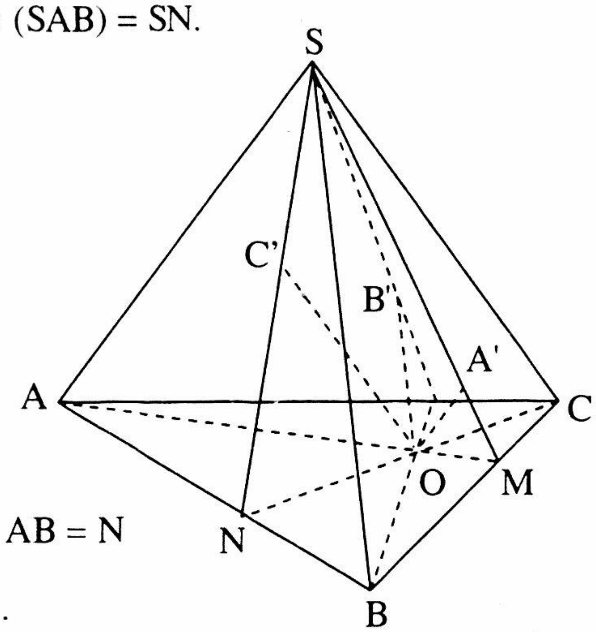
Bài 206.

Xét mặt phẳng (SACA')

Mặt phẳng (SBC) có giao tuyến là SM.

Xét Δ SAM thì: $\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{OA'}{SA}$ (1)

Tương tự xét mặt phẳng (SCOC') $\times$ (SAB) = SN.



Xét Δ SNC thì: $\dfrac{ON}{CN} = \dfrac{OC'}{SC}$ (2)

Tương tự ta có: $\dfrac{OP}{BP} = \dfrac{OB'}{SB}$ (3)

Ta cần chứng minh:

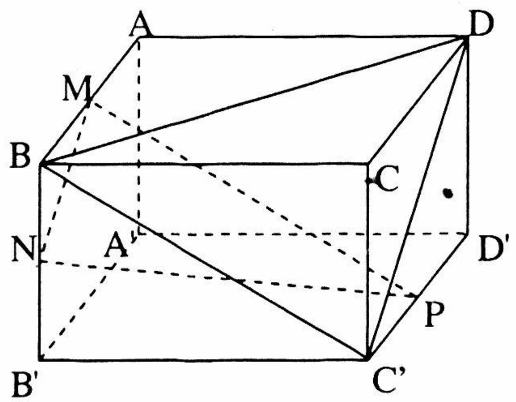
$\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{CN} + \dfrac{OP}{BP} = 1 \Leftrightarrow$ (đpcm)

Thật vậy:

Chứng minh bổ đề: Cho ΔABC, điểm O bất kỳ trong tam giác

AO $\times$ BC = M; BO $\times$ AC = P; CO $\times$ AB = N

Chứng minh: $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{CN} + \dfrac{OP}{BP} = 1$.



$\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}}$

$\dfrac{OP}{BP} = \dfrac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta ABC}}$

$\dfrac{ON}{CN} = \dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}$

$$\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{CN} + \dfrac{OP}{BP} = \dfrac{S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}} = 1.$$

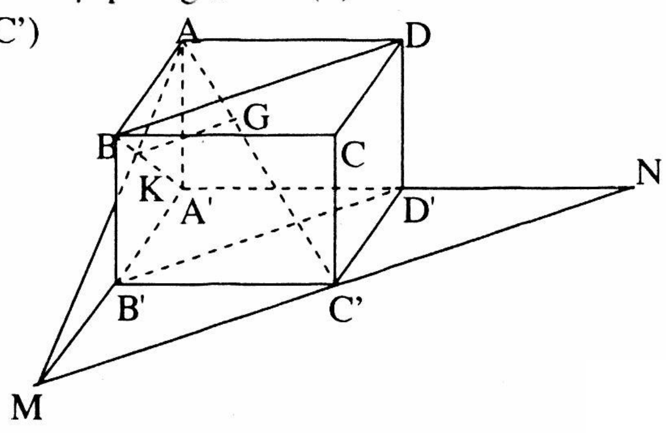
Bài 207.

MN//AB' mà AB'//DC' $\Rightarrow$ MN//DC' (1)

Xét hình bình hành ABC'D':thì mặt phẳng // BC' (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (MNP)//(BDC')

Bài 208. Gợi ý:



Phân tích:

Giả sử đường KC cần dựng.

KG là giao của 2 mặt phẳng

(P_1) chứa AC' và KG //B'D'

(P_2) chứa BA' và KG //B'D'

$\Rightarrow$ (P_1) //B'D', (P_2)//B'D'

(P_1) và (P_2) xác định được.

Cách dựng.

Dựng (P_1) chứa AC'M và (P_1) //B'D'

$\Rightarrow P_1$ chứa AC' và MN đi qua C'//B'C'

Dựng (P_2) chứa BA' và (P_2)//B'D'

$\Rightarrow P_2$ chứa BA' và BD//B'D'.

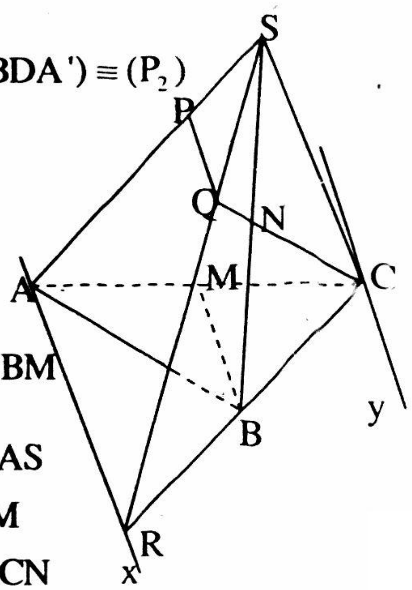
$KG = (P_1) \cap (P_2)$

<u>Chứng minh:</u>

KG//B'D' và KG x BA' (vì thuộc mặt phẳng $(BDA') \equiv (P_2)$)

$KG \times AC'$ vì $KG \in (AMN) \equiv (P_1)$

<u>Biện luận:</u> Bài toán có một nghiệm hình.



Bài 209.

a) Giả sử PQ dựng được:

PQ//BM, $P \in AS$; $Q \in CN$

Vậy mặt phẳng (AS, PQ) x (ABC) = Ax; Ax // BM

mặt phẳng (CN, PQ) x (ABC) = Cy; Cy // BM

Vậy PQ là giao tuyến của mặt phẳng $\alpha \begin{cases} \text{chứa AS} \\ \alpha // BM \end{cases}$

Mặt phẳng $\beta \begin{cases} \text{chứa CN} \\ \beta // BM \end{cases}$

Tìm giao tuyến đó:

$Ax \times CB$; $R \in (SBC) \Leftrightarrow (\alpha) \times (SBC) = SR \Rightarrow CN \times SR = Q$

Và $QP // Ax$; $PQ \times SA = P$

Vậy PQ cần tìm.

b) Xét trong ΔSRC có: SC = 1.

Vì BM trung tuyến nên CB = BR = 1; SB = 1.

Vậy ΔSRC vuông ở S, $\widehat{C} = 60^0$; $\widehat{R} = 30^0$

Vì N là trung điểm của SB $\Rightarrow CN \perp SB$ và $\widehat{SCQ} = 30^0$.

$\Rightarrow SQ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $SR = \sqrt{3}$; $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AR = \sqrt{3}$

Xét trong ΔSAR ta có: $\dfrac{PQ}{AR} = \dfrac{SQ}{SR} \Leftrightarrow \dfrac{PQ}{\sqrt{3}} = \dfrac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow PQ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (cần tính).

Bài 210.

Theo giả thiết: $M \in AC_1$; $N \in B_1D_1$; $MN // A_1D$

AC_1 và B_1D_1 chéo nhau nên MN là giao tuyến của 2 mặt phẳng α, β.

Mặt (α): $\begin{cases} \text{chứa } AC_1 \\ (\alpha) // A_1D \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha)$: chứa AC_1 và $C_1C_2 // A_1D$.

Mặt (β): $\begin{cases} \text{chứa } B_1D_1 \\ (\beta) // A_1D \end{cases}$

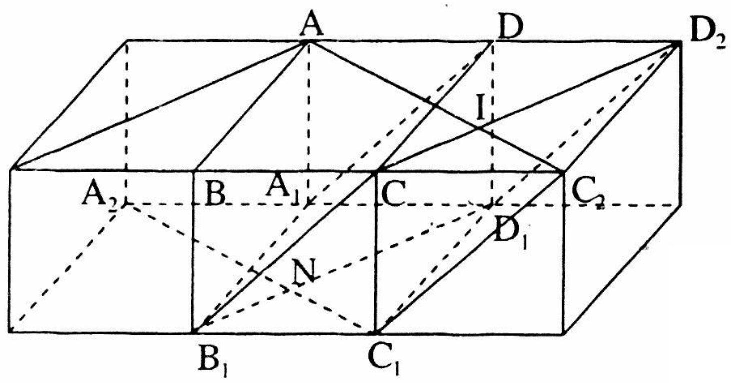
$\Rightarrow (\beta)$ chứa B_1D_1 và $D_1D_2 // A_1D$.

$AC_2 \times CD_2 = I \Rightarrow I \in (\alpha)$ và $I \in (\beta)$.

Trong mặt phẳng $(BD_1D_2C)//A1D$.

Từ I kẻ $IN//CB_1$ cắt B_1D_1 tại N $\Rightarrow C_1N = C_2I$ và $IN \times C_1A = M \Rightarrow MN$ cần tìm

Và $\dfrac{MC_1}{MA} = \dfrac{C_1N}{NA_2} = \dfrac{C_2I}{AI} = \dfrac{1}{2}$ (Tỉ số cần tìm)



PHẦN 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản

I. Định nghĩa phép chiếu song song

Cho mặt phẳng P và đường thẳng l cắt mặt phẳng P. Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng Δ đi qua M. $(\Delta) // l$ hoặc $\Delta \equiv l$; Δ cắt P tại M'. Với điểm $M' \in P$ .như trên gọi là hình chiếu song song của điểm M lên mặt phẳng P theo phương l.

- Mặt phẳng P gọi là mặt phẳng chiếu
- Đường thẳng l gọi là phương chiếu.

Chú ý:

- Các điểm thuộc l có hình chiếu là điểm giao của l với (P).
- Các điểm thuộc mặt phẳng P có hình chiếu là chính nó.
- M' gọi là ảnh của M qua phép chiếu theo phương l.

II. Tính chất.

1. Xét các đường thẳng, tia, đoạn thẳng không song song hoặc trùng với phương chiếu.

a) Hình chiếu song song của một đường thẳng là đường thẳng.

Hình chiếu song song của một tia là một tia

Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

2. Hình chiếu song song không làm thay đổi tỉ số hai đoạn thẳng song song hoặc hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng.

III. Hình biểu diễn của một hình không gian.

1. Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H lên một mặt phẳng hoặc là hình đồng dạng với hình chiếu đó.

2. Hình biểu diễn của một số hình thường gặp:

a) Một tam giác bất kỳ có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tuỳ ý (có thể tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông).

b) Hình bình hành bất kỳ bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình chữ nhật, hình thoi).

c) Hình thang bất kỳ có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý cho trước với tỉ số hai đáy của hình biểu diễn bằng tỉ số hai đáy hình đã cho.

Chú ý:

Hình thang không thể coi là hình biểu diễn một hình bình hành

d) Người ta dùng elíp để biểu diễn hình tròn.

B. Bài tập

I. Bài tập mẫu.

Dạng 1: Vẽ hình biểu diễn của một hình H cho trước.

Phương pháp giải:

Xác định các yếu tố đặc biệt của hình H

- *Yếu tố song song của hình H.*
- *Yếu tố song song của phương chiếu.*
- *Xác định tỉ số điểm M chia đoạn AB.*

Tất cả yếu tố song song, tỉ số các đoạn thẳng được bảo đảm qua phép chiếu.

Bài 211. Cho tam giác ABC, hãy chọn mặt phẳng chiếu P và phương chiếu l để hình chiếu của Δ ABC trên mặt phẳng P là:

a) Tam giác cân

b) Tam giác đều.

c) Tam giác vuông.

Giải.

a) Qua BC dựng một mặt phẳng P không đi qua A.

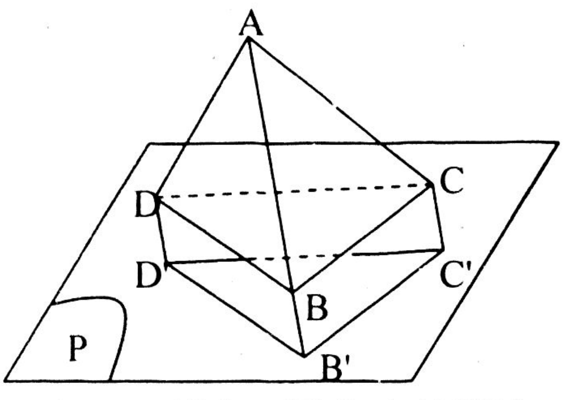
Trong mặt phẳng P dựng tam giác cân BCA_1.

Chọn phương $l \equiv AA_1 \Leftrightarrow \Delta ABC \Rightarrow \Delta A_1BC$ cân với phương chiếu AA_1 và mặt chiếu là (P).

b) Với cạnh BC chọn A_1' sao cho ΔA_1BC đều. Phương án chọn AA_1 thì $\Delta ABC \to A_1'BC$ đều.

c) Với cạnh BC trong P cho A_1'' sao cho A''_1BC vuông ở $A_1'' \Rightarrow \Delta ABC \to A_1''BC$ theo phương AA_1'' và mặt phẳng chiếu P.

Bài 212. Vẽ hình chiếu tứ diện ABCD lên mặt phẳng P theo phương AB (AB không song song với (P)).



Giải.

Phương $l \equiv AB$ nên AB có hình chiếu là giao của đường AB với (P) do đó $AB \cap (P) = A' \equiv B'$

C có hình chiếu C'

D có hình chiếu D'.

Vậy tứ diện ABCD có hình chiếu theo phương AB lên (P) là $\Delta A'C'D'$.

Bài 213. Cho Δ ABC có hình chiếu song song là $\Delta A'B'C'$. Chứng minh trọng tâm G của Δ ABC có hình chiếu là trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$.

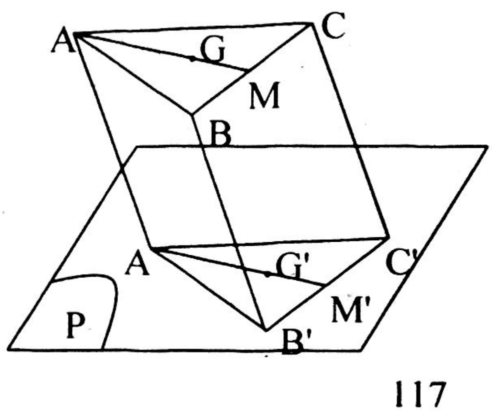
Giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Hình chiếu của M là M', M'là trung điểm của A'B'

$G \in AM \to G' \in A'M'$

$$\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \text{ nên } \frac{G'M'}{G'A'} = \frac{1}{2}$$

Vậy G' là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.



Bài 214. Vẽ hình chiếu hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$ lên mặt phẳng P theo phương chiếu AC_1. Với điều kiện (P) không song song AC'.

Giải.

Gọi O là tâm hình hộp.

Xét mặt phẳng P chứa C_1, phương chiếu $AC_1 \Rightarrow$ A, O, C_1 có hình chiếu C_1.

B_1OD có hình chiếu theo phương $AC_1 \Rightarrow B_1'D'$ nhận C_1 làm trung điểm.

A_1OC có hình chiếu theo phương $AC_1 \Rightarrow A_1'C'$ nhận C_1 làm trung điểm.

Từ (1) và (2) do $B_1A_1 // CD \Rightarrow A_1'B_1' // C'D'$.

BOD_1 có hình chiếu theo phương $AC_1 \Rightarrow B'D_1'$ nhận C_1 làm trung điểm.

Khi đó $B_1B' // D_1D'$.

Vậy hình chiếu là lục giác $B_1'B'C'D'D_1'A_1'$. Lục giác có các cặp cạnh đối song song với nhau và bằng nhau.

II. Bài tập tự giải.

Bài 215. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì song song với nhau.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song có thể cắt nhau.

Bài 216. Hình chiếu song song ΔABC biến thành chính nó khi:

a) Mặt phẳng chứa ΔABC song song với mặt phẳng chiếu.

b) Mặt phẳng chứa ΔABC song song với phương chiếu.

c) Mặt phẳng chứa ΔABC trùng với mặt phẳng chiếu.

d) Có hai điểm thuộc mặt phẳng chiếu (P).

Bài 217. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' trên AA', BC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với đỉnh hình hộp trên. Lấy điểm $P \in C'D'$. Dựng thiết diện khi cắt hình hộp ABCDA'B'C'D' với mặt (MNP).

Bài 218. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' lấy M, N không trùng với đỉnh hình hộp lần lượt thuộc cạnh AA', BC. Trong hình bình hành A'B'C'D' lấy điểm P. Hãy xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt (MNP).

Bài 219. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng qua 3 điểm M, N, P tương ứng thuộc ba mặt (ABCD); (ABB'A'); (ADD'A'). Xác định thiết diện của mặt phẳng đó với hình hộp.

Bài 220. Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tìm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC của đáy ABCD sao cho $IJ // BC_1$ và tính tỉ số $ID:IB_1$.

Bài 221. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau. Một điểm M thay đổi trên Ax, điểm N chạy trên By sao cho AM:BN = k cho trước. Tìm tập hợp điểm I chia trong đoạn MN theo tỉ số IM:IN = k.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II.

Bài 222. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

c) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

d) Hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng thì chéo nhau.

Bài 223. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai đường thẳng song song với hai mặt phẳng thì song song với nhau.

b) Hai đường thẳng chéo nhau thì không nằm trong một mặt phẳng.

c) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

d) Hai đường thẳng song song với nhau, một đường thẳng cắt một trong hai đường ấy thì cắt đường kia.

Bài 224. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

a) Hai mặt phẳng không song song thì cắt nhau.

b) Hai mặt phẳng phân biệt song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

c) Tập hợp các đường thẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng là một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho và đi qua điểm ấy.

Bài 225. Cho tứ diện ABCD, một điểm $M \in AB$, $\frac{MB}{MA} = x$. Qua M dựng mặt phẳng song song với AD và BC mặt này cắt tứ diện theo một thiết diện.

a) Chứng minh thiết diện là hình bình hành.

b) I, J lần lượt là trung điểm BC và AD. Tìm giao điểm của IJ với thiết diện tại K, Tìm tỉ số KI:KJ?

Bài 226. Cho hình chóp SABCD, đáy là hình bình hành, mặt phẳng P lần lượt cắt SA, SB, SC tại A', B', C'.

a) Hãy tìm giao điểm D' của (P) với cạnh SD.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của A'C' với SO. Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI}$.

c) Chứng minh: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI}$.

Bài 227. Cho hai hình bình hành ABCD; ABEF nằm trong các mặt phẳng khác nhau, lấy M, N lần lượt thuộc các đường AC, BF sao cho MC = 2AM, NF = 2BN. Kẻ qua M, N các đường thẳng song song với cạnh AB, chúng cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1.

a) Chứng minh MN // DE

b) Chứng minh M_1N_1 // (DEF)

c) Chứng minh (MNN_1M_1) // (DEF).

Bài 228. Cho hình chóp SABCD, ABCD là hình bình hành. M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh AB, AD, SC.

a) Dựng thiết diện tạo bởi mp(MNP) và hình chóp SABCD.

b) Mặt phẳng (MNP) cắt SB, SD lần lượt tại B_1, D_1. Hãy tính: $\dfrac{SB_1}{SB}$ và $\dfrac{SD_1}{SD}$.

Bài 229*. Cho tứ giác ABCD (AC cạnh chung của hai tam giác ABC và ACD, thuộc hai mặt phẳng). M, N, P, Q là các điểm theo thứ tự nằm trên cạnh AB, BC, CD, DA.

Nếu $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$ và $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QD}}$ thì MP và NQ cắt nhau.

Bài 230. Cho tứ diện ABCD cố định. Cắt tứ diện đó bởi một mặt phẳng sao cho thiết diện tạo thành một hình bình hành.

a) Có mấy loại mặt phẳng như vậy.

b) Xét vị trí mặt phẳng cắt tứ diện được thiết diện là hình thoi.

III. Hướng dẫn giải.

Bài 215. a)

Bài 216. c)

Bài 217.

Dùng phép chiếu song song theo phương AA' để tìm giao của (ABCD) với MP.

PP'//AA' với $P' \in CD$

$\Rightarrow (AA'D) \times (ABCD) = P'A$

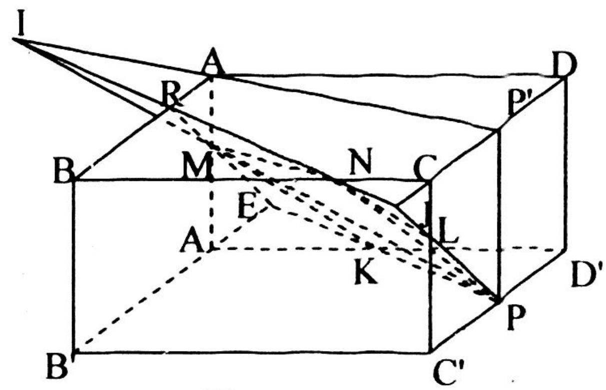
$PM \times P'A = I \Rightarrow PM \times (ABCD) = I$

Vậy (MNP) cắt (ABCD giao tuyến IN

$IN \times AB = R \Rightarrow RN \times CD = J$

Vậy (MNP) cắt (DCC'D') giao tuyến JP.

$JP \times CC' = L$



RM là giao tuyến của (PMN) với (ABB'A')

$RM \times B'A' = E$. PE là giao tuyến của mặt (PMN) với (A'B'C'D')

$PE \times A'D' = k$

Lục giác RNLPKM là thiết diện.

Bài 218. Giải tương tự bài 217.

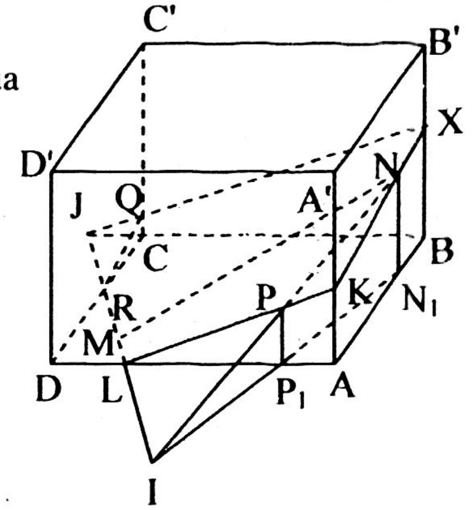
Bài 219. Cho ABCDA'B'C'D'

Xét NP giao với (ABCD)

Dùng hình chiếu song song theo AA'.

P có hình chiếu P_1; N có hình chiếu N_1

$\Rightarrow N_1P_1 \times NP = I \Rightarrow I = NP \times (ABCD)$



Vậy $(MPN)\times(ABCD)=IM$

$\Rightarrow IM\times AD=L;\ IM\times CB=J;\ IM\times CD=R$

Vậy: $(MPN)\times(AA'D'D)=LP\Rightarrow LP\times AA'=K$

$(MNP)\times(AA'B'B)=KN\Rightarrow KN\times BB'=X$

$(MPN)\times(BB'C'C)=JX\Rightarrow JX\times CC'=Q$.

Vậy thiết diện là ngũ giác QRLKX.

Bài 220. Tương tự bài 210

Bài 221.

Gọi O điểm chia trong AB: $\dfrac{OA}{OB}=k$

Vẽ Ox'//Ax; Oy'//By

Xét phép chiếu song song phương AB lên x'Oy'

$\begin{matrix} M\to M' \\ N\to N' \end{matrix}$ khi đó $MN\times M'N'=I$ cần tìm.

Vì $\dfrac{IN'}{IM'}=\dfrac{IN}{IM}=\dfrac{NN'}{MM'}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{k}\Leftrightarrow\dfrac{IM}{IN}=k$

Mà $\dfrac{IM'}{IN'}=\dfrac{OM'}{ON'}=\dfrac{IM'}{IN'}=k$.

Vậy I nằm trên phân giác góc $\widehat{x'Oy'}$.

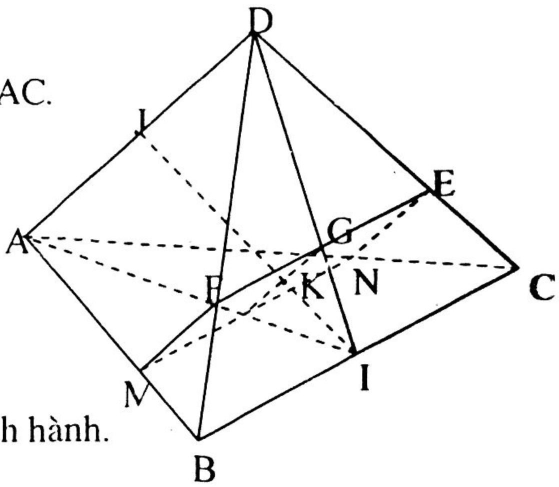
Bài 222. a).

Bài 223. b).

Bài 224. a).

Bài 225.

a) Tìm thiết diện đi qua $M\in AB$ và song song AD và BC. **Chứng minh** thiết diện hình bình hành.



Thật vậy qua M dựng:

MF//AD và $F\in DB$. MN//BC và $N\in AC$.

Từ F dựng FE//BC, $E\in DC$.

Vậy tứ giác MNEF là thiết diện.

MNEF là hình bình hành vì:

MN//BC, EF//BC $\Rightarrow$ MN//EF (1)

$MF\,//\,DA\Leftrightarrow(MFN)\times(ADC)=EN$

$\Leftrightarrow EN\,//\,MF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNEF là hình bình hành.

b) Qua IJ dựng mặt AID.

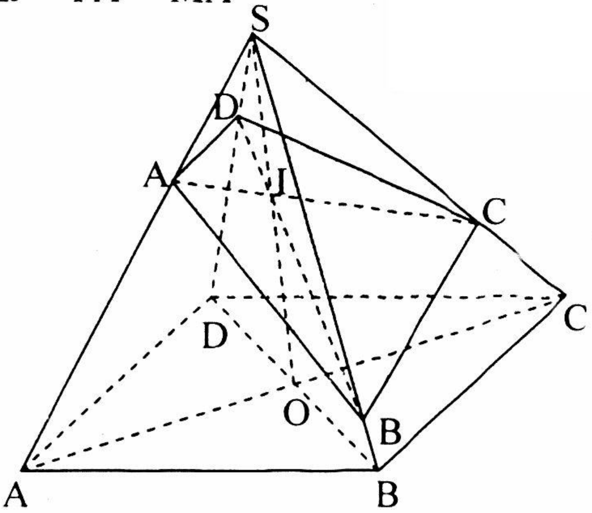
$(AID)\times(BDC)=DI\Leftrightarrow DI\times EF=G$ (3)

$(AID)\times(ABC)=AI\Leftrightarrow AI\times MN=P$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (AID) \times (MNEF) = GP$

Vậy $GP \times IJ = K$ và $GP // AD \Rightarrow \dfrac{KI}{KJ} = \dfrac{PI}{PA} = \dfrac{MB}{MA} = x$.

Bài 226.



a) $A' \in SA$; $B' \in SB$; $C' \in SC$

Nối $A'C' \times SO = I$

Nối $B'I \times SD = D'$ (cần tìm)

b) Xét ΔSAC

Kẻ AE//A'C'

Kẻ CF//A'C'

Ta có: $\dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SE}{SI} = \dfrac{SO + OE}{SI}$ (1)

$\dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SF}{SI} = \dfrac{SO - OF}{SI}$ (2)

Mà O là trung điểm AC nên OE = OF

Vậy: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{2SO}{SI}$ (đpcm)

c) Chứng minh: $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{2SO}{SI}$

Xét ΔSBD (Chứng minh tương tự câu 2).

Bài 227. Tương tự bài 199.

Xét ΔADF

Trong ΔADC ta có: $M_1D = 2MA$ (1)

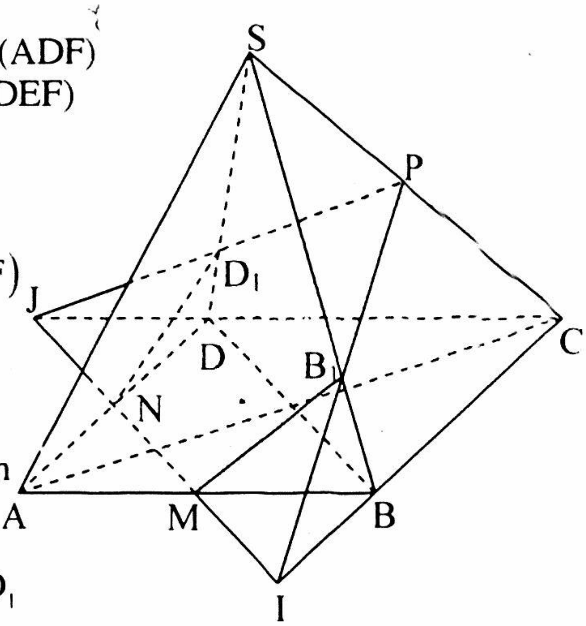
Trong ΔABF ta có: $N_1F = 2N_1A$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M_1N_1 // DF \Rightarrow M_1N_1 // (ADF)$

Mặt phẳng(MM_1N_1N) và mặt phẳng (DEF)

Có:

$$\left.\begin{array}{l} M_1N_1 // DF \\ N_1N // EF \\ M_1N_1 \times N_1N \\ DF \times EF \end{array}\right\} \Rightarrow (MM_1N_1N) // (DEF)$$



Bài 228.

a) $(MNP) \times (SBC) = PI$ có điểm chung P và $MN \times BC = I$; $PI \times SB = B_1$

Tương tự: $MN \times DC = I$; $JP \times SD = D_1$

Vậy thiết diện: MB_1PD_1N.

b) Xét ΔSIC, $B \in CI$, B là trung điểm;

$P \in SC$, P là trung điểm

$PI \times SB = B_1 \Rightarrow B_1$ là trọng tâm $\Delta SIC \Rightarrow \frac{SB_1}{SB} = \frac{2}{3}$

Tương tự thì D_1 là trọng tâm $\Delta SJC \Rightarrow \frac{SD_1}{SD} = \frac{2}{3}$.

Bài 229. Vận dụng bài mặt phẳng song song

Gợi ý: $\frac{MA}{MB}.\frac{PC}{PD}.\frac{NB}{NC}.\frac{QD}{QA} = 1 \Leftrightarrow MNPQ$ thuộc một mặt phẳng $\Rightarrow$ $MN \times PQ$ hoặc $MP \times NP$.

Bài 230.

a) Lấy một điểm $M \in BC$, dựng một mặt phẳng đi qua M song song AB và CD thì có thiết diện MNEF.

MN//AB (vì (MNE)//AB, EF//AB)

MF//CD, NE//CD

$\Rightarrow$ MNEF là hình bình hành.

b) Gọi AB = a; CD = b (vì tứ diện ABCD cố định)

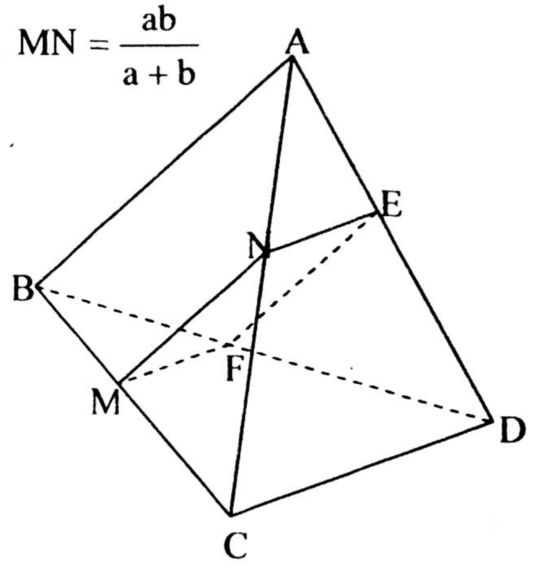
Gọi MN = x. Tìm vị trí M để hình bình hành MNEF là hình thoi, nghĩa là MN = MF = x

Đặt: $\frac{x}{a} = k = \frac{CM}{CB}$

$$\frac{x}{b} = \frac{BM}{CB} = \frac{BC - CM}{CB} = 1 - \frac{CM}{CB} = 1 - \frac{x}{a}$$

$$\frac{x}{b} = 1 - \frac{x}{a} \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

Vậy xét ΔABC. Dựng đoạn MN//AB, $MN = \frac{ab}{a+b}$



Chương 3.. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Phần 1.VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. Kiến thức cơ bản

I. Các định nghĩa

1. Vectơ, giá và độ dài của vectơ.

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng định hướng, đó là một đoạn thẳng chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối.
- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
- Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hay ngược hướng.
- Hai vectơ nằm trên hai giá không song song với nhau thì gọi là hai vectơ không cùng phương.
- Độ dài vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút, điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
- Vectơ có độ dài bằng 1 gọi vectơ đơn vị. Kí hiệu độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Vậy: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

2. Hai vectơ bằng nhau.

- Hai vectơ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{cases}$
- Vectơ $\vec{0}$ khi điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- Với mọi điểm A tuỳ ý: $\overrightarrow{AA} = \vec{0} \Rightarrow \left|\vec{0}\right| = 0$.

II. Các phép toán vectơ.

1. Phép cộng vectơ.

a) Định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tuỳ ý. Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

b) Tính chất:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán)

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (tính chất kết hợp)

$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

c) Các quy tắc cộng hai hay nhiều vectơ.

* *Quy tắc tam giác: Cho 3 điểm A, B, C bất kì ta có:* $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \end{cases}$

* *Quy tắc hình bình hành: ABCD là hình bình hành:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

*** Quy tắc hình hộp.**

Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'.Các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ đường chéo AC' cùng chung đỉnh A. Khi đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

* *Mở rộng quy tắc 3 điểm trong không gian:*

Cho n điểm: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bất kì: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

2. Phép nhân vectơ với một số thực k.

Định nghĩa:

Cho số thực $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq 0$. Tích của số thực k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ. Kí hiệu: $k\vec{a}$

- Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k > 0$
- Vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ khi $k < 0$
- $\left|k\vec{a}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$

Tính chất:

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số m, n ta có:

$m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m\vec{a} + m\vec{b}$

$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

$m\left(n\vec{a}\right) = mn\vec{a}$

$0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$

$1.\vec{a} = \vec{a}$

$-1\vec{a} = -\vec{a}$

($-\vec{a}$ gọi là vectơ đối với $\vec{a}$).

3. Phép trừ hai véc tơ: $\vec{a} - \vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

($\vec{a} - \vec{b}$ là vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ cộng với vectơ đối của vectơ $\vec{b}$).

Chú ý:

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}-\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow -\vec{b}=-\vec{a}$.

III. Sự đồng phẳng của ba vectơ.

1. Định nghĩa:

Trong không gian, ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của các vectơ cùng song song với một mặt phẳng.

2. Tính chất:

- Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trong không gian, từ một điểm O bất kì trong không gian vẽ:

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ O, A, B, C cùng nằm trên một mặt phẳng.
- Nếu có một trong ba vectơ là vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng.
- Nếu trong ba vectơ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đồng phẳng.

3. Điều kiện để 3 vectơ đồng phẳng.

Định lý 1: Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

4. Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Định lý 2: Cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Với một vectơ $\vec{x}$ bất kì đều tìm được bộ ba số m, n, p duy nhất sao cho: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$.

IV. Tích vô hướng của hai vectơ.

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian. Lấy A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Khi đó trong mặt phẳng (ABC) ta có góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu: $(\vec{a},\vec{b})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\widehat{ABC}$

2. Tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian là một số thực được ký hiệu: $\vec{a}.\vec{b}$. Số đó được xác định: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Nếu $\vec{a}=0$ hoặc $\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$.

3. Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trong không gian và số thực $k \neq 0$ ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$(k\vec{a}).\vec{b} = k\vec{a}.\vec{b}$

$\vec{a}.\vec{a} = (\vec{a})^2$

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}.\vec{a}\right)}$

$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$ ứng dụng để chứng minh hai đường thẳng **vuông góc** với nhau.

B. Bài tập

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Xác định vectơ; Vận dụng các phép tính cộng, trừ vectơ.

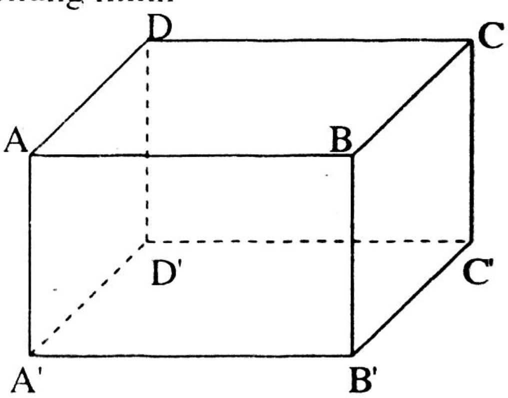
Phương pháp giải:

- *Sử dụng quy tắc tam giác*
- *Quy tắc hình bình hành*
- *Quy tắc hình hộp.*

Bài 231. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' chứng minh

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$.



Giải.

a) Xét trong hình bình hành ABCD

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (1)

Xét trong hình bình hành AA'C'C.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{BB'}$ (đpcm).

Bài 232. Cho tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E và F sao cho:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Giải.

Theo cách phân tích vectơ theo ba vectơ.

Vẽ hình hộp có 3 cạnh AB, AC, AD đỉnh đối diện là đỉnh **A là điểm E** vì: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Theo hình trên.

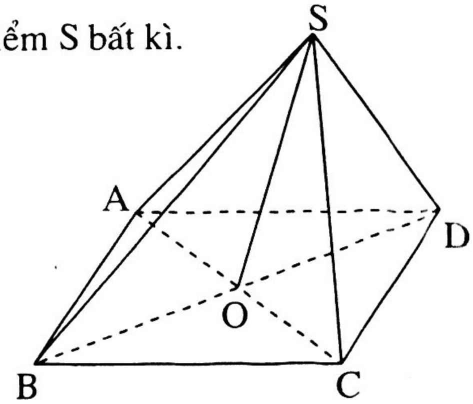
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AN}$.

Qua 3 điểm A, D, N vẽ hình bình hành ADNF. F là điểm phải tìm vì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AN}$ (Theo quy tắc hình bình hành hay: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Bài 233. Cho ABCD là hình bình hành, điểm S bất kì.

Chứng minh: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.



Giải.

Gọi O là giao của $AC \times BD = O$

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ (1)

$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ (2)

Theo quy tắc hình bình hành

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

Dạng 2: Chứng minh sự đồng phẳng của 3 vectơ.

Phương pháp chung:

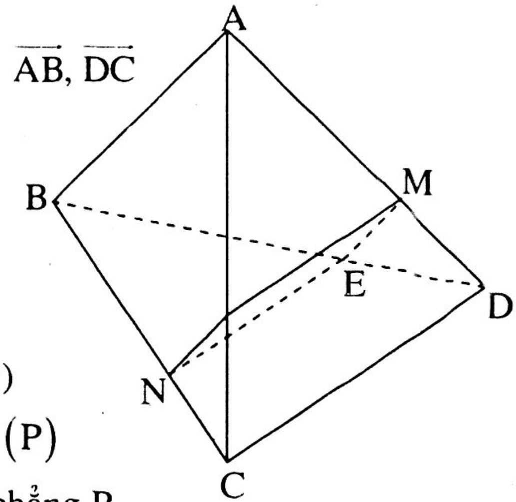
- *Chứng minh* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *song song với một mặt phẳng P cố định.*
- *Nếu có một vectơ song song với một trong hai vectơ.*

Bài 234. Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng. M $\in$ AD sao cho: $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC}$. N $\in$ BC. Chứng minh $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ đồng phẳng.

Giải.

Cách 1: Xét tứ diện ABCD.



Qua N dựng mặt phẳng P song song với $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$

$(P) \times BD = E$; $(P) \times AD = M'$.

Thì NE//CD; EM//AB (vì (P)//AB và (P)//DC)

$\Rightarrow \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{ED}{EB}$ mà $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{M'D}{M'A}$

Vì $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'A} = -2\overrightarrow{M'D}$ (*)

Điều này chứng tỏ: $M \equiv M'$ hay $\overrightarrow{MN} // (P)$

Vậy: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ song song với mặt phẳng P.

Cách 2: Vẽ mặt phẳng (α) chứa AB và (α)//CD. $(\alpha) \times (BCD) = Bx$

Trên Bx lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CD}$. Hình BCDF là hình bình hành.

Kẻ NE//CD//BP.

Xét mặt phẳng (MNE) và mặt phẳng (α) có:

NE//BP vì BCDP là hình bình hành $\Rightarrow$ DE = NC, PE = NB

$$\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{NC}\right|}{\left|\overrightarrow{NB}\right|} = \frac{1}{2} = \frac{NC}{NB} = \frac{\left|\overrightarrow{MD}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|} = \frac{ED}{EP} \quad (2)$$

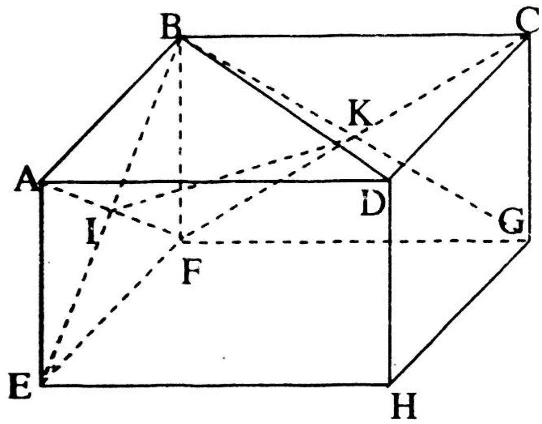
Từ (2) $\Rightarrow ME // AP \Leftrightarrow (MNE)//(\alpha) \Rightarrow MN // (\alpha)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ song song với mặt phẳng α thì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Bài 235. Cho hình hộp ABCDEFGH, gọi I là tâm của hình bình hành ABFE và K là tâm hình bình hành BCGF. Chứng minh $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Giải.

Cách 1:



Xét mặt phẳng (EFGH) chứa $\overrightarrow{GF}$ (1)

Vectơ $\overrightarrow{IK}$ có giá IK//EG $\in$ (EFGH)

Vì xét ΔBEG thì IK đường trung bình

$\Rightarrow \overrightarrow{IK} // (EFGH)$ (2)

$\overrightarrow{BD}$ có giá BD mà BD//FH $\Rightarrow \overrightarrow{BD} // (EFGH)$ (3)

Vậy từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.

Cách 2:

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= -\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK} + \left(-\overrightarrow{GF}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$ (*)

(*) Chứng tỏ 3 vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{IK}$ đồng phẳng.

Dạng 3: Ứng dụng tích vô hướng để tính độ dài của một đoạn thẳng, tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa hai vectơ, chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Thường sử dụng:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0.$$

Bài 236. Cho ABCD là hình chữ nhật, một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$.

<u>*Giải.*</u>

Dạng toán bài 236 là chứng minh hằng đẳng thức.

Phương pháp 1: Dùng các phương pháp sau: Biến vế trái (biến đổi tương đương) về vế phải

Phương pháp 2: Biến vế trái đẳng thức thành biểu thức A; Biến vế phải đẳng thức thành biểu thức A.

<u>*Giải.*</u>

a) Dùng phương pháp 1:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MC}$$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}) \quad + \quad \vec{0} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} \text{ (đpcm)}$$

b) Gọi O là trọng tâm ABCD

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$$

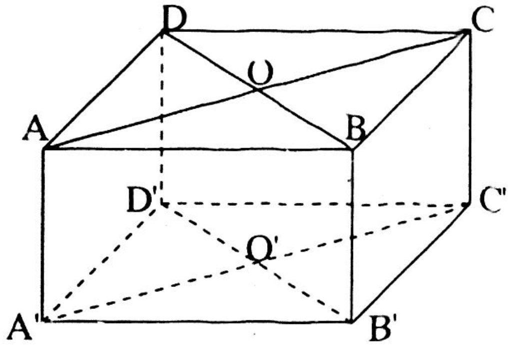
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$$

Theo (1) thì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$ nên $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$ (đpcm).

Bài 237. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông ABCD và S là một điểm sao cho



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}.$$

Tính SO theo a.

<u>*Giải.*</u>

Gọi O' là tâm của A'B'C'D':

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$

Mà $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OO'}$

$\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OO'}$

$\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OS}\right| = 4\left|\overrightarrow{OO'}\right| = 4a$

Bài 238. Trong không gian cho ba điểm A, B, C. AB = a, AC = b, BC =a. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 60^0$.

Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$; $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Giải.

$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2cb.\frac{1}{2} = c^2 + b^2 - cb$

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = c^2 + b^2 - cb$.

Vậy:

$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{c^2 + b^2 - cb}$

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{c^2 + b^2 - cb}$.

II. Bài tập tự giải

Bài 239. Cho hình chóp SABCD.

a) ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Chứng minh ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

Bài 240. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D', các trung điểm của các cạnh AB, BB', B'C', C'D', D'D, DA lần lượt là M, N, P, Q, E, F. Chứng minh MNPQEF đồng phẳng.

Bài 241. Cho tứ diện ABCD. Tìm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$. (G gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD.)

Bài 242. Cho hình lăng trụ ABCA'B'C'. Gọi I và I' lần lượt là trọng tâm của ΔABC, ΔA'B'C'. O là trung điểm II'.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$.

b) Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCC', M là trung điểm A'B'. Chứng minh O, M, G thẳng hàng.

c) Tìm tỉ số: $\frac{\overline{OM}}{\overline{OG}}$.

Bài 243. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{BD'}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Bài 244. (Đề thi ĐH 62/Va). Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng P. Tìm M ∈ (P) sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 245. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BB'. Chứng minh $MN \perp AC$.

Bài 246. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh O là điểm duy nhất.

Bài 247. (Đề 101/Va) Cho hình 6 cạnh đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các vectơ: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}$ qua các vectơ: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

Bài 248. Cho ΔABC, A', B', C' lần lượt trung điểm của BC, CA, AB. Hãy tính: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

Bài 249. (Đề 114/Va) Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Gọi P, Q là các điểm xác định bởi: $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'}$; $\overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D}$.

a) Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm M của cạnh BB'.

b) Tính độ dài theo PQ.

Bài 250 (Đề 121/Va) Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt trung điểm các cạnh AB, A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm của các đường chéo của các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Chứng minh trọng tâm ΔPQR và ΔP'Q'R' trùng nhau.

Bài tập làm thêm.

Bài 251. Chứng minh rằng diện tích ΔABC có thể tính theo công thức.

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2.\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Bài 252. Cho hình lập phương ABCDEFGH (AE//BF//CG//DH), K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm DF và BH. Chứng minh: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

Bài 253. Trong không gian cho ba vectơ: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ khác $\vec{0}$. Giả sử có: $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ với m, n, p các số thực với điều kiện nào của m, n, p thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Bài 254. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng, đặt $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{yOz} = \beta, \widehat{zOx} = \gamma$.

Chứng minh: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -\frac{3}{2}$.

Bài 255. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Ba góc phẳng đỉnh A đều bằng 60^0. Các cạnh của hình hộp đều bằng l. Tính độ dài các đường chéo.

Bài 256. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D', M, N lần lượt thuộc CA, DC' sao cho: $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = n\overrightarrow{NC'}$.

a) Xác định m để các đường MN//BD'.

b) Khi ấy tính MN biết: $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^0$, BA = a, BB' = b, BC = c.

Bài 257. Cho hình lăng trụ ABCA'B'C', gọi I, J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. K là điểm thuộc B'C' sao cho: $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh bốn điểm A, I, J, K đồng phẳng.

Bài 258. Cho ABCD, AB'C'D' là hai hình bình hành chung đỉnh A. Chứng minh: $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

Bài 259. Cho tứ diện ABCD, gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh: $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GC} = 0$. (Nêu bài toán tương tự).

Bài 260. Cho tứ diện ABCD, lấy M, N, P, P thuộc lần lượt AB, BC, CD, DA sao cho:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}.$$

Xác định giá trị k để M, N, P, Q đồng phẳng.

III. Hướng dẫn giải.

Bài 239.

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{CS}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Điều này chứng tỏ: ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (1)

Vì O là giao đường chéo: $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OD}$

(1) $\Leftrightarrow (1+m)\overrightarrow{OC} + (1+k)\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (*)

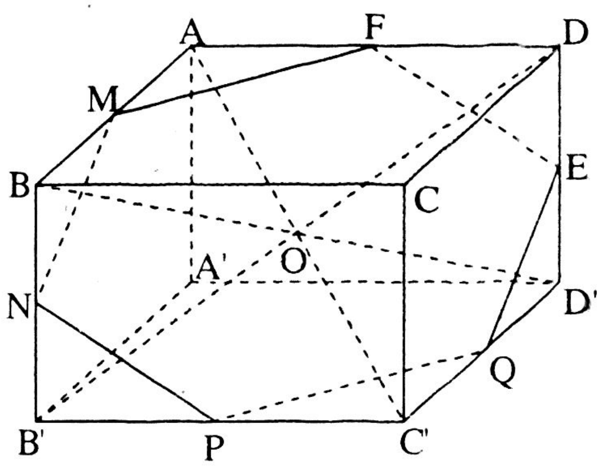
Hai vectơ $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OD}$ không cùng phương

nên đẳng thức(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m=0 \\ 1+k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$ O là trung điểm của AC và BD.

Suy ra ABCD là hình bình hành.

Bài 240.

Cách 1: Gọi O là tâm hình hộp. Ta có:



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \ (1);$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'}\right) \ (2);$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA}\right) \ (3);$$

$$\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \ (4)$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'}\right) \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\right) \ (6)$$

Từ (1), (4) và (6) $\Rightarrow \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OF}$ đồng phẳng.

Mà $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OP}$

Vậy 6 điểm M, N, E, F, P, Q thuộc một mặt phẳng.

Cách 2:

Xét mặt phẳng(MNQ)

Thì $(MNQ) \times (CC'D'D) = QE$ vì MN//(CC'D'D)

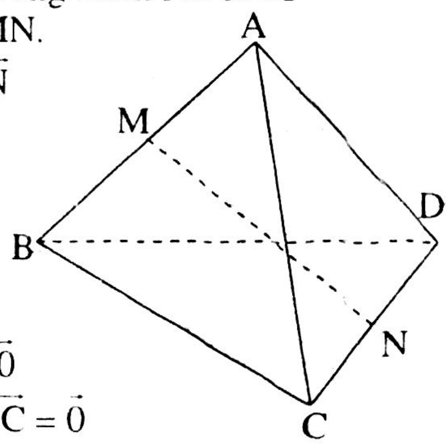
$(MNQ) \times (D'DAA') = EF$ vì EF//(MQ)$\Rightarrow$ QE, EF $\in$ (MNQ)

Tương tự: MF, NP $\in$ (MNQ) $\Rightarrow$ M, N, P, Q, E, F thuộc một mặt phẳng.

Bài 241.

G gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD. Gọi trung điểm AB là M

Trung điểm CD là N; gọi G là trung điểm MN.



Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$; $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}\right)$$

Mà $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$.

Bài 242.

a) I là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

I' là trọng tâm $\Delta A'B'C' \Leftrightarrow \overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'A'} + \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'B'} + \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'C'}$$

$$= 3\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OI'} = \vec{0}$$

vì O là trung điểm II'. (đpcm)

b) Vì G là trọng tâm:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}=4\overrightarrow{OG}$

Ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=4\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OM}=\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$. Vậy O, G, M thẳng hàng.

c) $\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\frac{\overline{OM}}{\overline{OG}}=-2$.

Bài 243.

ABCD.A'B'C'D' là hình hộp nên: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AD}=\vec{c}-\vec{b}$

$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{B'D}=\overrightarrow{B'C}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{b}=\vec{c}-2\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'D'}$

$=\vec{a}-\vec{b}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}$

Bài 244.

Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD, O là trung điểm IJ.

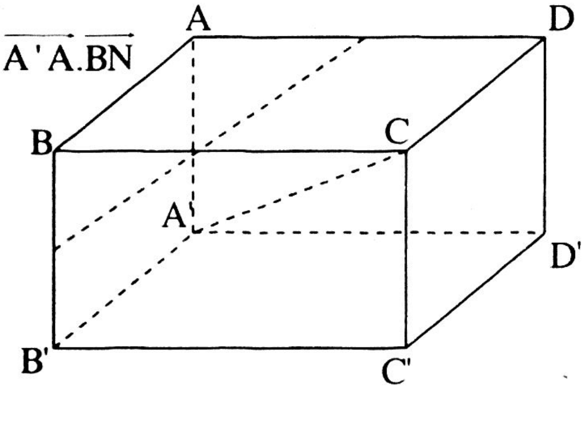
Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

$|\overrightarrow{MO}|$ nhỏ nhất khi $OM\perp(P)\Rightarrow$ M là hình chiếu của O lên mặt phẳng P.

Bài 245.

$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$



$\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{BN}$
$+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BN}$
$+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BN}$
$=\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA}$
$=-\frac{1}{2}a^2+a^2+\frac{1}{2}a^2=0$.

Vậy $\overrightarrow{A'C}\perp\overrightarrow{MN}$ (đpcm).

Bài 246.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, O là trung điểm của IJ.

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Gọi O' điểm thoả mãn: $\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}+\overrightarrow{O'D}=\vec{0}$.

$4\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OO'}=\vec{0}\Leftrightarrow O'\equiv O$.

Bài 247.

Gọi O là tâm của lục giác đều.

Δ ACF đều $\Leftrightarrow$ CF là trung tuyến của Δ ACF

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \vec{v} + \vec{u}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \vec{v} + \overrightarrow{EF} = \vec{v} + \overrightarrow{CB} = \vec{v} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

$= \vec{v} + \vec{u} + \overrightarrow{CA} = \vec{v} + \vec{u} - (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC})$

$= \vec{v} + \vec{u} - \vec{v} - \overrightarrow{EC} = \vec{u} - \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{DC} = \vec{u} - \vec{v} - \overrightarrow{DC}$

$= \vec{u} - \vec{v} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF}$

$= \vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}.$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{u} - \left(\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}\right) = -\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}.$

Bài 248.

Phương hướng giải dùng quy tắc cộng vectơ, quy tắc hình bình hành

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$$

$$\overrightarrow{BC}\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right) + \overrightarrow{CA}\left(\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}\right) + \overrightarrow{AB}\left(\frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}\right) = 0.$$

Bài 249.

Gọi M là trung điểm BB’

Phương hướng giải.

Tìm mối quan hệ giữa $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$. Vận dụng ABCDA'B'C'D' là hình lập phương biểu diễn $\overrightarrow{MP}$ qua các vectơ có điểm là đỉnh hình lập phương.

<u>*Giải.*</u>

a) *Cách 1.*

$$\overrightarrow{MB'} = -\overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{2}$$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} = \vec{u}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} = \vec{w}.$

$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'C'}$

$\overrightarrow{AD} = -\vec{v} - \vec{w}$

$\overrightarrow{CQ} = \vec{v} - \vec{u}$

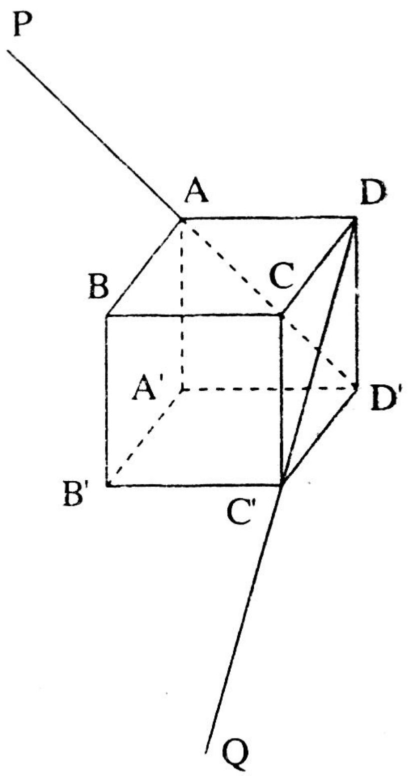
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$

$= -\dfrac{\vec{v}}{2} + \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{u} - \dfrac{3}{2}\vec{v} - \vec{w}$

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q}$

$= \dfrac{1}{2}\vec{v} + \vec{w} - \vec{u} + \vec{v} = -\vec{u} + \dfrac{3}{2}\vec{v} + \vec{w}$

Vậy $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ}$. Suy ra M là trung điểm PQ.



Cách 2: Xét mặt phẳng (PD'Q).

$(PD'Q) \times (CC'D'D) = D'Q$

$D'Q \times CC' = C'' \Rightarrow C'C'' = \dfrac{1}{2}DD'$ và $C''Q = C''D'$

$(PD'Q) \times (AA'B'B) = AM' \Rightarrow AM' // D'Q$

$M'C'' // AD'; M'C'' = AD' \Rightarrow M'A = C''D'$

Xét tam giác PQD' ta có: M'A//D'Q và M'A//D'Q và M'A= **Error!**D'Q.

Vậy M' là trung điểm PQ $\Rightarrow M' \equiv M$ là trung điểm BB'

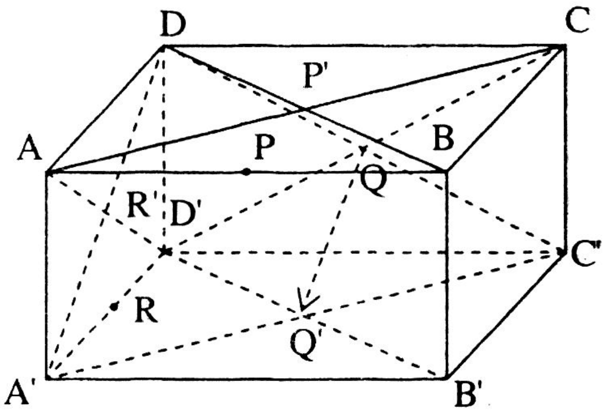
b) $\left(\overrightarrow{MP}\right)^2 = \left(\vec{u} - \dfrac{3}{2}\vec{v} - \vec{w}\right)^2 = \vec{u}^2 + \dfrac{9}{4}\vec{v}^2 + \vec{w}^2 = a^2 + \dfrac{9}{4}a^2 + a^2$ (Vì $\vec{u} \perp \vec{v} \perp \vec{w}$).

$\overrightarrow{MP}^2 = \dfrac{17a^2}{4} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right| = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = a\sqrt{17}$.

Bài 250.

a) Thật vậy:



$\overrightarrow{PP'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{QQ'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB'}$

$\overrightarrow{RR'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{D'D} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$

$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'B}\right) = \vec{0}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác RQP.

$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$

Xét: $\overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \vec{0}$.

Vậy G là trọng tâm $\Delta P'Q'R'$ (đpcm).

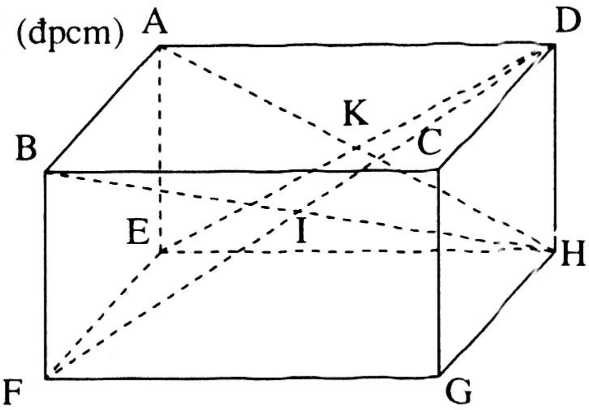
Bài tập làm thêm

Bài 251. Gợi ý:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2[1-\cos^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})]} \text{ (đpcm)}$$

Bài 252.



Xét mặt phẳng (ABCD)

$\overrightarrow{KI} // \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{KI} //(ABCD)$ (1)

$\overrightarrow{FG} // \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{FG} //(ABCD)$ (2)

$\overrightarrow{AC} \in (ABCD)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

Bài 253.

Giả sử m, n, p tồn tại một số khác 0 nghĩa là: $m^2 + n^2 + p^2 \neq 0$.

Giả sử $m \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c}$, điều này chứng tỏ $\vec{a}$ biểu diễn qua $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Suy ra $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Bài 254.

Lấy trên Ox, Oy, Oz các điểm E_1, E_2, E_3 sao cho $OE_1 = OE_2 = OE_3$.

Vì Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e_1}; \overrightarrow{OE_2} = \vec{e_2}; \overrightarrow{OE_3} = \vec{e_3}$ không đồng phẳng.

Vậy: $\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} \neq \vec{0}$

$(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})^2 > 0$

$3\vec{e_1}^2 + 2\vec{e_1}^2\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -3/2$ (đpcm).

Bài 255.

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC'}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AB}^2 = 6l^2$

$\left|\overrightarrow{AC'}^2\right| = l\sqrt{6}$

$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$

Mà $\widehat{AA'B} = 120^0$; $\widehat{AA'D'} = 120^0$

$\left|\overrightarrow{A'C}\right| = l\sqrt{2}$.

Các đường chéo B'D, BD' cách tính tương tự.

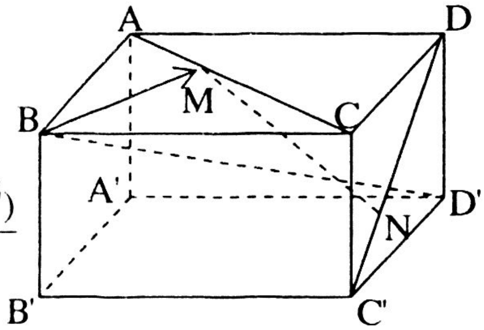
Bài 256.

Đặt: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = a$; $\left|\overrightarrow{BB'}\right| = b$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = c$;

$\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ (gt)

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC} = \vec{c} - m\left|\overrightarrow{MA}\right| = \vec{c} - m\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right)$

$= \vec{c} - m\overrightarrow{MB} - m\overrightarrow{BA} = (1-m)\overrightarrow{BM} = \vec{c} - m\vec{a}$



$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}$ (1)

Tương tự:

$\overrightarrow{BN} = \dfrac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'}}{1-m} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - m(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'})}{1-m}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \dfrac{\vec{a} - m\vec{b}}{1-m} + \vec{c}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \dfrac{1+m}{1-m}\vec{a} - \dfrac{m}{1-m}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Để

$$\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} = \left(k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+m}{1-m} = k \\ \dfrac{-m}{1-m} = k \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1+m}{1-m} = \dfrac{-m}{1-m}$$

$\Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

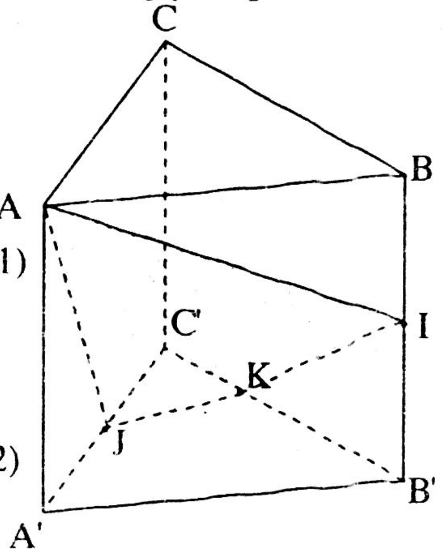
Vậy $k = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

Tính: $\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = \dfrac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right)$.

Bài 257.

Cách 1: Xét vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$. Chứng minh 3 vectơ đồng phẳng

$\Rightarrow$ 4 điểm đồng phẳng.



Đặt: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}\right) = \frac{1}{2}\left(2\vec{b} + \vec{a}\right) = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}\right) + \frac{1}{2}\left(2\vec{a} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AK} = \left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'K}\right) = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + 2\overrightarrow{KB'}$$

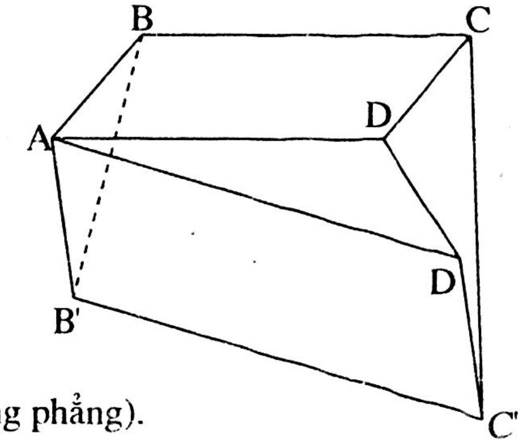
$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB'})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \vec{c} + 2\overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{c} + 2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}\right) \Rightarrow$ A, K, I, J đồng phẳng.

Cách 2: Dựng thiết diện (AJK) với ABCA'B'C'. Chứng minh: $(AJK) \times (BB') = I$

Bài 258.



$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$$

$$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$$

$$= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$$

(điều này chứng tỏ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{CC'}$ đồng phẳng).

Bài 259.

Hướng dẫn giải: $\overrightarrow{GD}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \overrightarrow{GD}.\vec{0} = \vec{0}$ (đpcm).

Bài 260.

Cách 1:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

$\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ (2)

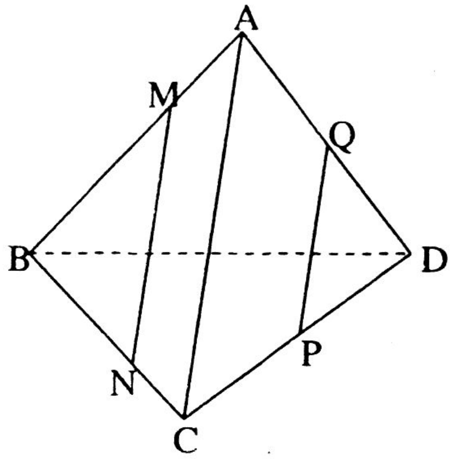
Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow MN // AC$.

Xét $(MNQ) \times (ACD) = QP'$

để MNPQ thuộc mặt phẳng

$P' \equiv P \Leftrightarrow QP' // AC \Leftrightarrow \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Hay $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.



Cách 2:

Đặt: $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó:

$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$; $\overrightarrow{MD} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}$; $\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

Các điểm MNPQ thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi tồn tại các số m, n thoả mãn:

$\overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{MN} + n\overrightarrow{MQ}$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}$

$= -\frac{2}{3}m\vec{a} + \frac{2}{3}m\vec{c} - \frac{1}{6}n\vec{a} - \frac{1}{3}n\vec{b}$ vì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}m - \frac{1}{6}n = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}n = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}m = k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2};\ m = \frac{3}{4};\ n = 1.$$

PHẦN 2. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Kiến thức cơ bản

I. Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

1. Định nghĩa: Vectơ $\vec{a} \neq 0$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu $\vec{a}$ song song với d hoặc a trùng với đường thẳng d.

2. Tính chất:

a) Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{a}$ $(k \neq 0)$ là vectơ chỉ phương của d.

b) Đường thẳng d hoàn toàn xác định nếu d đi qua điểm A đã cho và biết vectơ chỉ phương.

c) Hai đường thẳng phân biệt có hai vectơ chỉ phương cùng phương khi và chỉ khi hai đường thẳng đó song song với nhau.

II. Góc giữa hai đường thẳng.

Góc giữa hai đường a, b là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua điểm O và lần lượt song song với a, b. Kí hiệu $\left(\widehat{a, b}\right) = \left(\widehat{b, a}\right)$.

Xác định góc giữa 2 đường thẳng a, b. Lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng, vẽ đường thẳng đi qua O và song song với đường thẳng còn lại.

Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $\alpha < 90^0$ và $180^0 - \alpha$ nếu $\alpha > 90^0$.

III. Hai đường thẳng vuông góc với nhau.

1. Định nghĩa: Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. Kí hiệu: $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.

2. Tính chất 1: Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

3. Tính chất 2: Nếu một đường thẳng c vuông góc với một trong hai đường thẳng a//b thì vuông góc với đường thẳng kia.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Phương pháp giải:

Để chứng minh hai đường thẳng $d_1 \perp d_2$ *trong không gian:*

- *Sử dụng tính chất quan hệ vuông góc trong một mặt phẳng.*
- *Chứng minh AB vuông góc với CD khi:* $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} = 0$.

Bài 261. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' (có AA'//BB'//CC'//DD') có tất cả các cạnh bằng nhau (các mặt đều hình thoi).

Chứng minh:

$AC \perp B'D'; BD \perp A'C'; BA' \perp DC'; B'A \perp CD'; BC' \perp A'D; B'C \perp AD.$

Giải.

ABCDA'B'C'D' là hình hộp $\Rightarrow BD // B'D'$ mà ABCD hình thoi nên $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp B'D'$. (đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường kia).

Tương tự: AC//A'C'; $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp A'C'$ (đpcm).

$$\begin{cases} BA' // CD' \\ CD' \perp DC' \end{cases} \Rightarrow DC' \perp BA' \text{ (đpcm).}$$

Chứng minh tương tự ta có: $B'A \perp CD'; BC' \perp A'D; B'C \perp AD'$.

Bài 262. Chứng minh rằng một hình tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối diện còn lại cũng vuông góc với nhau.

Giải.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right).\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Vậy: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ (đpcm).

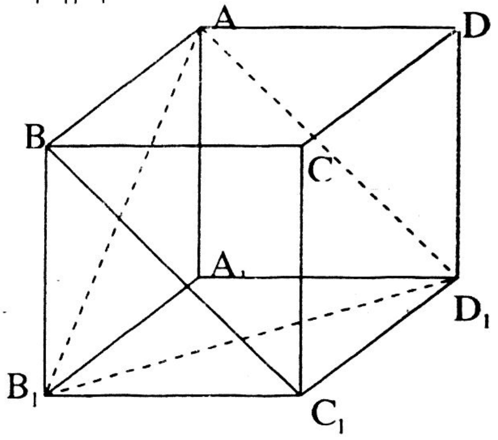
Dạng 2: Tính góc giữa hai đường thẳng.

Phương pháp chung:

Vận dụng tích vô hướng của hai vectơ.

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right); \quad \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Bài 263. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1//BB_1//CC_1//DD_1$). Tính góc giữa hai đường thẳng AB_1 và BC_1.



Giải.

Ta thấy $BC_1 // AD_1$

góc giữa $(\widehat{AB_1, BC_1}) = (\widehat{AB_1, AD_1})$

Xét ΔAB_1D_1 các cạnh $AB_1 = AD_1 = B_1D_1$ nên ΔAB_1D_1 là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{B_1AD_1} = 60^0 = (\widehat{AB_1, BC_1})$

Bài 264. Cho ΔABC, $\Delta ABC'$ là hai tam giác đều có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, CB, BC', C'A. Chứng minh:

a) $AB \perp CC'$.

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

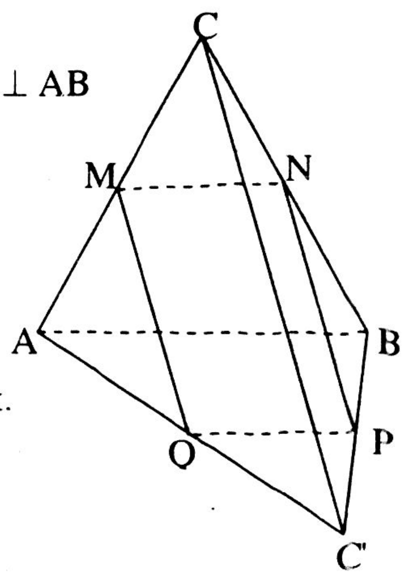
c) Tính diện tích MNPQ biết $CC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AB = a$.

Giải.

a) Xét $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'}\right).\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}$

$= -\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 60^0 + \left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 60^0$

Đặt: AB = BC = AC = AC' = BC' = a.



$\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB} = -a^2\cos 60^0 + a^2\cos 60^0 = 0 \Leftrightarrow CC' \perp AB$

b)

$$\left.\begin{array}{l} MN // AB \\ MQ // CC' \\ NP // CC' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} MN \perp MP & (1) \\ NP \perp MP & (2) \end{array}$$

Tương tự: $QP // AB \Leftrightarrow MQ \perp QP$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

c) Ta có:

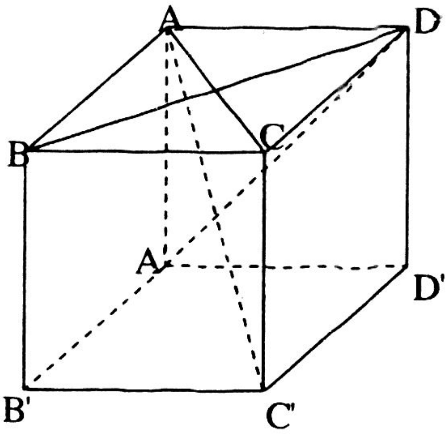
$$MN = \frac{a}{2};\ CC' = 2MQ = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow MQ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}.$$

Bài 265. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'.

a) Tính góc giữa hai đường AC và DA'.

b) Chứng minh: $BD \perp AC'$.



Giải

a) Đặt: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA'} = \vec{a}.\vec{c} - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} - \vec{b}^2$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{DA'}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}\right) = 0 - 0 + 0 + -\vec{b}^2$

$\left|\sqrt{2}a\right|\left|\sqrt{2}a\right|\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}) = -a^2 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}) = 120^0.$

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'})$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{A'C'}$

$= 0 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{B'D'} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Leftrightarrow BD \perp AC'$.

II. Bài tập tự giải

Bài 266. Cho hình chóp SABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các đường AB và SC.

Bài 267. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' (các mặt đều là hình thoi) có cạnh là a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^0$. Chứng minh A'B'CD là hình vuông.

Bài 268. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thoi, cạnh SA = AB và $SA \perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường SD và BC.

b) I, J lần lượt thuộc SB, SD sao cho IJ // BD. Chứng minh góc giữa AC và IJ không đổi.

Bài 269. Cho tứ diện ABCD có cặp cạnh đối bằng nhau, trong mặt phẳng (BCD) dựng tam giác PQR sao cho BCD là các trung điểm của QR, RP, PQ. Chứng minh AP, AQ, AR vuông góc với nhau từng đôi một.

Bài 270*. Chứng minh rằng nếu hai mặt phẳng song song lần lượt với hai cặp cạnh đối của tứ diện tạo với tứ diện các thiết diện hình chữ nhật thì mặt phẳng song song với cặp cạnh đối thứ 3 cũng tạo nên một thiết diện hình chữ nhật.

Bài 271. Cho tứ diện ABCD đều gọi O là trung điểm đoạn nối A với trọng tâm ΔBCD. Chứng minh các đường OB, OC, OD vuông góc với nhau.

Bài 272. Cho tứ diện ABCD thoả mãn hệ thức: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + CB^2$. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện của tứ diện vuông góc với nhau.

Bài 273. Cho hình chóp SABCD có đáy là ABCD là hình bình hành. AD = 2AB, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A với M thuộc cạnh AD. Xét mặt phẳng α đi qua M và song song với SA, CD.

a) Tìm thiết diện mặt phẳng (α) với hình chóp.

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b biết AB = a; SA = b và M là trung điểm của AD.

Bài 274. Cho tứ diện ABCD. M, N lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AD sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$ với k số thực. Gọi góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và

$\overrightarrow{BA}$ là α, góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ là β. Tìm mối quan hệ giữa AB và CD để $\alpha = \beta = 45^0$.

Bài 275. Cho tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau.

a) Chứng minh các đường nối trung điểm các cạnh đối diện vuông góc với cạnh đó.

b) Chứng minh các đường nối trung điểm các cặp cạnh đối diện đồng quy và vuông góc với nhau từng đôi một.

Bài tập tự giải.

Bài 276. Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng và đường thẳng Δ. Lấy 3 điểm A', B', C' thuộc Δ sao cho AA', BB', CC' đều vuông góc với Δ. Chứng minh: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Bài 277. Cho tứ diện ABCD có:

$BC = AD = a$; $AC = BD = b$; $AB = CD = c$;

$(AD, BC) = \alpha$; $(AC, BD) = \beta$; $(AB, CD) = \gamma$.

Chứng minh rằng trong ba số hạng: $a^2\cos\alpha$; $b^2\cos\beta$; $c^2\cos\gamma$ có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

Bài 278. Cho tứ diện SABC có các mặt ASB, BSC, CSA tương đương có tổng các góc phẳng ở đỉnh S bằng 180^0. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của tứ diện bằng nhau từng đôi một. (*Chú ý:* Hai tam giác tương đương khi có diện tích bằng nhau; góc phẳng ở đỉnh S: $\widehat{ASB} = \gamma$; $\widehat{ASC} = \beta$; $\widehat{BSC} = \alpha$).

Bài 279. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = 60^0$; $\widehat{BAD} = 60^0$; $\widehat{CAD} = 90^0$. Chứng minh:

a) $AB \perp CD$

b) Nếu I, J lần lượt trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$; $IJ \perp CD$.

Bài 280. Cho tứ diện ABCD: $CD = \frac{4}{3}AB$ gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD cho biết $JK = \frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD với các đường IJ và AB.

III. Hướng dẫn giải.

Bài 266.

Cách 1:

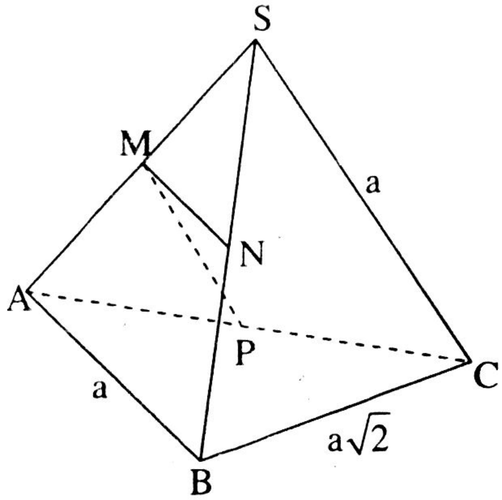
Xét ΔABC ta có góc $A = 90^0$ (vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$)

$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = |a||a|\cos120^0$.

(Vì $\left(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}\right) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}\right) = 180^0 - 120^0 = 60^0$)



Cách 2:

Tính góc $(\widehat{SC,AB})$, là góc giữa hai đường tương ứng song song với SC và AB, đó là: $(\widehat{MN,MP})$. Trong đó M, N, P lần lượt trung điểm của SA, SB, AC.

Tính góc hai đường SC và AB, tính $\widehat{NMP}$.

Xét ΔSPB có: $SP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $BP = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$

$SP^2 + PB^2 = 2PN^2 + \dfrac{SB^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} = 2PN^2 + \dfrac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow PN^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Leftrightarrow PN = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

Vậy ΔMPN có: $PN = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; $MP = MN = \dfrac{a}{2}$.

Tính góc $\widehat{NMP}$: $\cos\widehat{NMP} = ?$

$$\cos\widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP} = -\frac{a^2/4}{2.a/2.a/2} = -\frac{1}{2}$$

Vậy góc SC và AB bằng 60^0.

Bài 267.

Xét $\Delta B'BC$ có $BC = BB' = a$;

$\widehat{B'BC} = 60^0 \Rightarrow B'C = BB' = B'A' \Rightarrow A'B'CD$ là hình thoi.

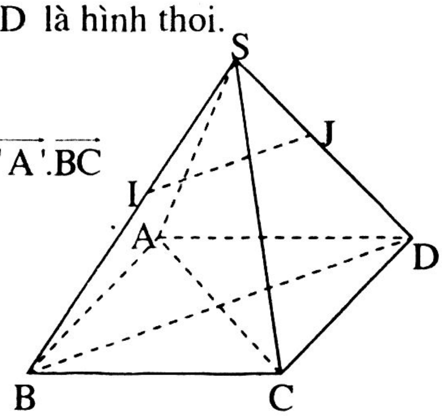
*Chứng minh $B'C \perp B'A'$

Xét:

$\overrightarrow{B'C}.\overrightarrow{B'A'} = \left(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} = 0$

(Chú ý góc B'B và BA bằng 120^0).

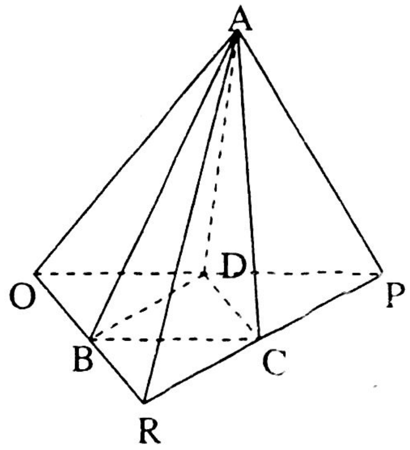


Bài 268.

a) $BC \,//\, AD \Rightarrow$ góc giữa SD và BC là góc SD và AD hay góc $\widehat{SDA}$. Vì $SA \perp BC \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{SDA} = 45^0 \Rightarrow$ góc giữa SD và BC bằng 45^0.

b) $I \in SB$; $J \in SD$. $IJ \,//\, BD$. Góc giữa AC và IJ là góc giữa AC và BD. Vì ABCD hình thoi nên $AC \perp BD \Leftrightarrow AC \perp IJ$.

Bài 269.

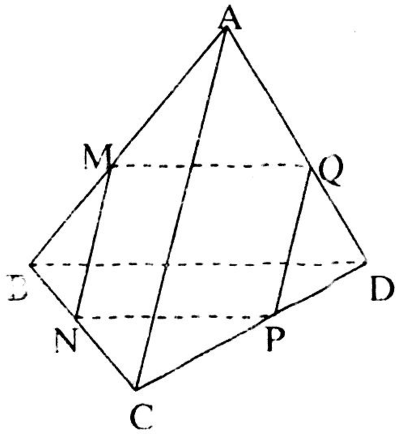


Xét ΔAQR có $QR = 2DC$; $DC = AB = \frac{1}{2}QR$

$\Leftrightarrow \Delta AQR$ vuông ở A $\Rightarrow AQ \perp AR$.

Tương tự: $AR \perp AP$ (đpcm).

Bài 270.



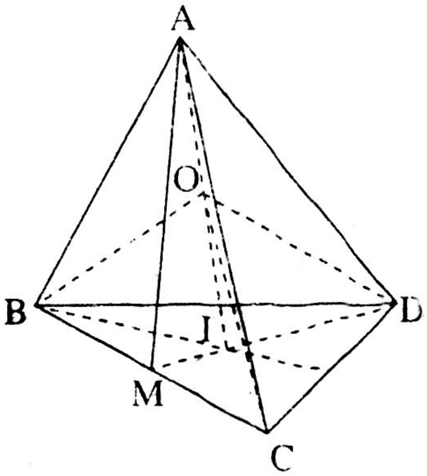
Giả sử tứ diện ABCD, mặt phẳng (α) song song với AC và BD tạo thành thiết diện MNPQ là hình chữ nhật.

$MN//PQ$ mà $\widehat{QMN} = 90^0 \Rightarrow AC \perp BD$ (1)

Tương tự $AB \perp CD$ (2)

Vậy theo bài 262 thì $AD \perp BC$. Vậy thiết diện song song AD và BC là hình chữ nhật.

Bài 271.



Xét ΔAMD có $AM = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao Δ đều).

Tính đường cao ΔAMD thuộc cạnh MD, đường cao đó chính AI.

Thật vậy:

$AI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MI = \sqrt{MA^2 - AI^2}$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{6a^2}{9}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}MN$$

$\Rightarrow$ I là trọng tâm ΔBCD.

$$OI = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow OD^2 = DI^2 + OI^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{6} = \frac{6a^2 + 3a^2}{18} = \frac{1}{2}a^2$$

Tương tự $OC^2 = OB^2 = OD^2 = \frac{1}{2}a^2$

$OC^2 + OD^2 = a^2 \Rightarrow \Delta DOC$ vuông cân (1)

$OC^2 + OB^2 = a^2 \Rightarrow \Delta BOC$ vuông cân (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OB \perp OC \perp OD$.

Bài 272.

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{CD}^2$$

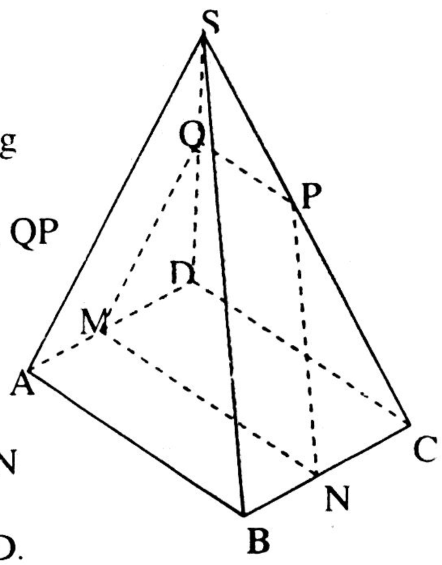
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}\right)\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.2\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DM}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB}.$$

Tương tự: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ (đpcm).

Bài 273.



a) Giả sử mặt phẳng (α) đi qua M và song song SA và CD nên có giao tuyến MQ//SA

$(\alpha) \times (SDC) = QP // CD$ mà $AB // CD \Rightarrow MQ \perp QP$

$(\text{vì } SA \perp AC)$

$(\alpha) \times (SBC) = NP \quad (MN // AB // DC)$

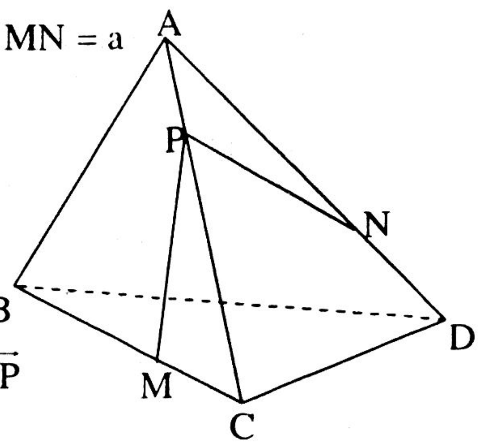
Vậy thiết diện là hình thang vuông MQPN vuông ở M và Q.

b) Tính diện tích (MNPQ) khi M trung điểm AD.

$$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}b;\ QP = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB = a;\ MN = a$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a.\frac{b}{2}\right) = \frac{3}{8}ab.$$

Bài 274.



Kẻ MP//AB thì dễ thấy NP//CD

(vì $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$; $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$

Góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ là góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$

hay góc $\widehat{PMN} = \alpha$.

Góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Hay góc $\widehat{PNM} = \beta$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{MPN} = 90^0 \Rightarrow AB \perp CD$ và $PN = MP$.

Ta thấy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AP}{CP} = |k|$ và $AB \perp CD$.

Vậy mối quan hệ giữa AB và CD là: $\dfrac{AB}{CD} = |k|$; $AB \perp CD$.

Thì góc giữa $(\widehat{MN, BA}) = (\widehat{MN, CD}) = 45^0$

Bài 275.

a) Xét hai tam giác ABC và BDC có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AC = DB \\ BC \text{ (cạnh chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta BDC \Rightarrow AM = DM \Rightarrow \Delta AMD \text{ cân tại M}$$

$\Rightarrow MN \perp AD$.

Tương tự: $MN \perp BC$.

Vậy MN vuông góc với AD và BC (đpcm).

b) Xét tứ giác MPNQ ta có: $MQ = NP = \dfrac{1}{2}AC$; $MP = NQ = \dfrac{1}{2}BD$

$\Rightarrow$ MPNQ là hình thoi vì AC = BD. Suy ra $MN \perp PQ$ vì hai đường chéo của hình thoi.

Tương tự IR là trung điểm AC và BD $\Rightarrow IR \perp MN \Rightarrow IR \perp PQ \Leftrightarrow$ giao nhau tại O là trung điểm mỗi đường.

<u>Bài tập tự giải</u>

Bài 276. Sử dụng định lý Talét.

Bài 277.

$$\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{DA}\right|}$$

Tính: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DC}^2 - \overrightarrow{BD}^2}{2} - \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{BA}^2}{2}$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2} = c^2 - b^2.$$

Vậy: $\cos\alpha = \dfrac{|c^2 - b^2|}{a^2}$; $\cos\beta = \dfrac{|a^2 - b^2|}{c^2}$; $\cos\gamma = \dfrac{|a^2 - c^2|}{b^2}$

Ta coi: $a > b > c$ thì: $a^2\cos\alpha = b^2 - c^2; c^2\cos\beta = a^2 - b^2; b^2\cos\gamma = a^2 - c^2$.

Khi đó: $b^2\cos\beta = a^2\cos\alpha = c^2\cos\gamma$.

Bài 278.

Gợi ý: SA = a; SB = b; SC = c.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = S_{BSC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

Chia cả hai vế cho abc.

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Ta chứng minh SA = BC.

Giả sử: $\Delta A'B'C'$ có: $\widehat{A} = \alpha; \widehat{B} = \beta'; \widehat{C} = \gamma$

Theo định lý hàm sin ta có: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{A'C'} = \dfrac{\sin\gamma}{A'B'}$

$\Rightarrow A'C' = b; A'B' = c \Rightarrow \Delta SBC = \Delta A'B'C' \Rightarrow BC = B'C' = a \Rightarrow BC = SA = a$;

Chứng minh tương tự ta có: SB = AC = b; SC = AB = c.

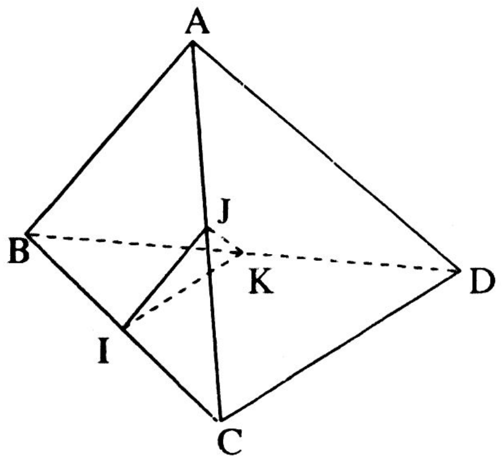
Bài 279. (Vận dụng bài 275).

Bài 280.

$IK = \frac{1}{2}CD = \frac{4}{6}AB = \frac{2}{3}AB$

$JK = \frac{5}{6}AB$

$JI = \frac{1}{2}AB$



Tính: $IJ^2 + JK^2 = JK^2 = \frac{25}{36}AB^2$

$\Rightarrow \Delta JIK$ vuông ở I $\Leftrightarrow JI \perp CD$

Mặt khác IJ // AB $\Rightarrow$ AB $\perp$ CD.

PHẦN 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. Kiến thức cơ bản

1. Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng α nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng α.

Kí hiệu: $d \perp (\alpha)$ hoặc $\alpha \perp d$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng α thì d vuông góc với α.

3. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng.

- α là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng a, b cắt nhau và có lần lượt hai vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$ của hai đường thẳng a và b. Khi đó kí hiệu tập hợp $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng α.
- Nếu vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt α thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ phải là Vectơ không cùng phương.
- Mỗi mặt phẳng có vô số cặp vectơ chỉ phương.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương mặt phẳng α thì cặp $k\vec{u}$ và $k\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng α.
- Mặt phẳng α xác định được khi biết một điểm thuộc mặt phẳng và biết cặp vectơ chỉ phương.

4. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

a) Định nghĩa: Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng α nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).

b) Tính chất:

- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến mặt phẳng a thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.
- Nếu (a) có cặp vectơ chỉ phương $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$ và $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

5. Sự liên quan giữa quan hệ vuông góc và quan hệ song song.

- Một mặt phẳng α vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc đường thẳng kia.

$$\begin{cases} a // b \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha) \perp b$$

- Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ d \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow d \perp \beta$$

- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

$$\begin{cases} (\alpha) \perp d \\ (\beta) \perp d \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

$$\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d_1 // d_2$$

6. Phương pháp xác định một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng và một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

- Cho một điểm O và đường thẳng (Δ), có duy nhất một mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.
- Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.
- Cho một điểm O và một mặt phẳng (α) có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua O và vuông góc với (α).

7. Phép chiếu vuông góc.

a) Cho d và mặt phẳng a. Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng a gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng a.

b) Định lý 3 đường vuông góc: Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng a, a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng α. Khi đó đường thẳng b nằm trong mặt phẳng α vuông góc với a khi và chi khi b vuông góc với a'

$$\begin{cases} a' \text{ không vuông góc với } (\alpha) \\ b \in (\alpha) \end{cases} \text{Khi đó } b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'.$$

c) Góc giữa đường với mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng α.

- Nếu $d \perp (\alpha)$ ta nói góc giữa d và α bằng 90^0.
- Nếu d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và hình chiếu vuông góc của d là l' lên mặt phẳng (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

B. Các dang bài toán tư giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Phương pháp giải:

Chứng minh $d \perp (P)$, *thông thường dùng các cách sau:*

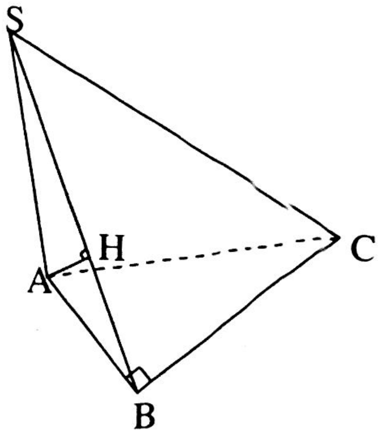
Cách 1:

$$\begin{cases} d \perp a : a \in (P) \\ d \perp b : b \in (P) \\ a \times b \end{cases}$$

Cách 2:

$d // b$ mà $b \perp (P)$.

Bài 281. Cho hình chóp SABC có ΔABC vuông ở B. $SA \perp (ABC)$. Tìm chân đường thẳng kẻ từ A đến (SBC) và vuông góc với (SBC).



Giải.

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Từ A kẻ $AH \perp SB$.

(Trong mặt phẳng (SAB)).

Vậy:

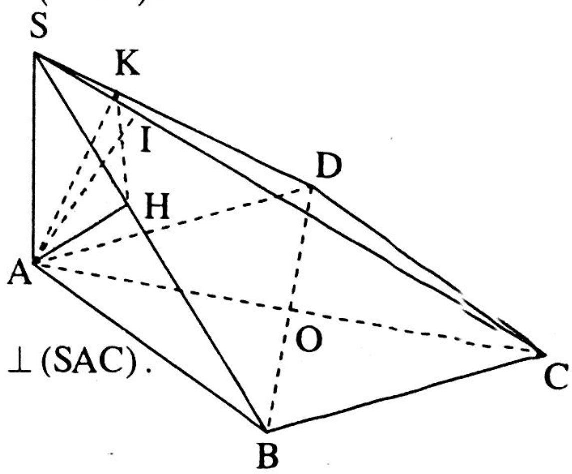
$$\left.\begin{matrix} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

Bài 282 Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình vuông có tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt hình chiếu của A trên các cạnh SB, SC và SD.

a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$; $CD \perp (SAD)$; $BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh: $SC \perp (AHK)$ và $I \in (AHK)$.

Giải.



a) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ vì $BC \in (ABCD)$ (1)

$AB \perp BC$ (vì ABCD là hình vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Lập luận tương tự: $CD \perp (SAD)$; $BD \perp (SAC)$.

b) $(SCB) \perp (AH)$

vì $AH \perp SB$; $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp SC$ (3)

Tương tự: $AK \perp (SCD)$

vì $AK \perp SD$; $AK \perp CD \Rightarrow AK \perp SC$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (AKH) \perp SC$ (đpcm)

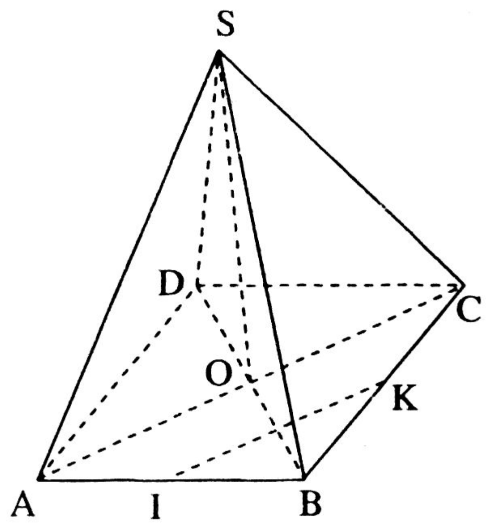
Vì $AI \perp SC$ và $A \in (AKH) \Leftrightarrow AI \in (AHK)$ (đpcm)

Bài 283. Cho hình chóp SABCD có đáy hình thoi tâm O và có SA = SC, SB = SD.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

b) I, K lần lượt trung điểm của BA, BC. Chứng minh $IK \perp SD$.

Giải.



a) O là trung điểm AC và BD

Xét ΔSBD cân $\Rightarrow SO \perp BD$ (1)

(đường trung tuyến là đường cao).

ΔSAC cân $\Rightarrow SO \perp AC$ (2)

(đường trung tuyến là đường cao).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

(vì SO vuông góc với hai đường cắt nhau trong (ACBD)).

b) Ta thấy IK//AC (đường trung bình tam giác)

$\Rightarrow IK \perp BD$ (3)

$SO \perp (ABCD) \Leftrightarrow SO \perp IK$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow IK \perp (SBD)$

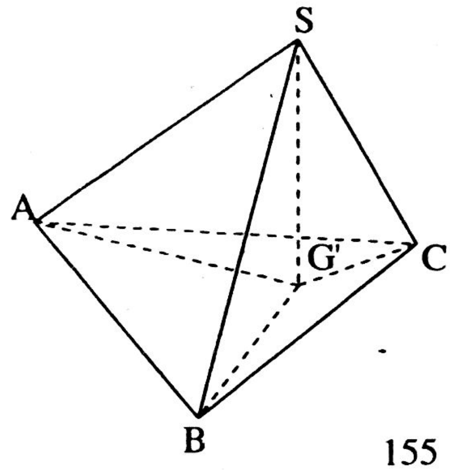
mà $SD \in (SBD) \Rightarrow IK \perp SD$ (đpcm).

Bài 284. Cho hình chóp SABC trong đó SA = AB = SC = a và $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 60^0$; $\widehat{BSC} = 90^0$.

a) Tính độ dài các cạnh AB, AC, CA. Chứng minh Δ ABC vuông.

b) Gọi G là tâm vòng tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh $SG \perp (ABC)$

Giải.



a) $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 60^0$; SA = SB = SC = a.

Vậy ΔASB và ΔASC là tam giác đều nên AB = AC = a;

ΔBSC vuông cân có cạnh SB = SC = a

$\Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông ở A

(theo định lý Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$).

b) Gọi chân đường vuông góc hạ từ S xuống (ABC) là:

G' $\Rightarrow \Delta SAG' = \Delta SBG' = \Delta SCG' \Rightarrow$ Vậy G' cách đều A, B, C $\Rightarrow G' \equiv G$.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau thông qua chứng minh đường thẳng d_1 vuông góc với một mặt phẳng chứa d_2.

Phương pháp giải:

Chứng minh $d_1 \perp d_2$. *Chọn mặt phẳng (P) chứa d_2. Tìm cách chứng minh d_1 vuông góc với (P).*

Thông thường sử dụng định lí 3 đường vuông góc.

Bài 285. Cho hình chóp OABC các góc phẳng tại đỉnh O đều bằng 90^0.

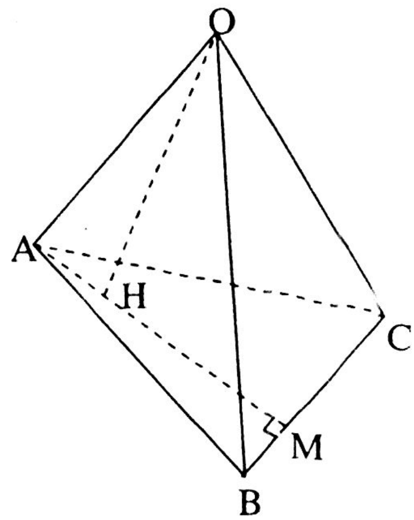
a) $OH \perp (ABC)$. Chứng minh H là trực tâm ΔABC.

b) Tìm điểm I cách đều 4 đỉnh.

<u>*Giải.*</u>

a) Để chứng minh H là trực tâm ΔABC cần chứng minh $AH \perp BC$.

Cần chứng minh $BC \perp (AOH)$



Thật vậy: $OA \perp (BOC) \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Leftrightarrow BC \perp AH$ (đpcm).

Tương tự: $BH \perp AC$; $CH \perp AB$ (vai trò A, B, C như nhau)

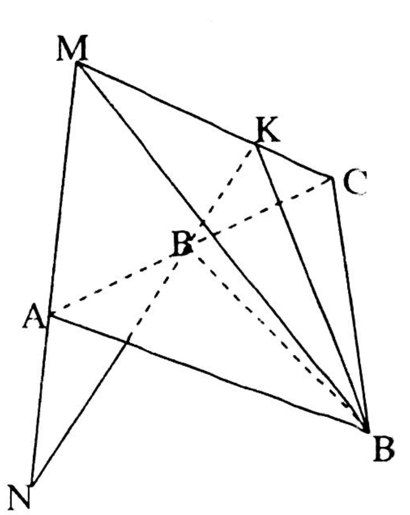
nên H là trực tam ΔABC.

b) Gọi E là trung điểm BC.

Kẻ $Ex \perp (OBC)$ $(Ex // OA)$ và cùng phía với OA.

Gọi F là trung điểm của OA. Qua F dựng đường thẳng song song với OE cắt Ex tại I. Điểm I cách đều 4 đỉnh ABCD.

Bài 286. Cho mặt phẳng (P) tam giác ABC đều thuộc mặt phẳng (P), qua A dựng $d \perp (P)$, trên d lấy M tuỳ ý, dựng mặt phẳng (Q) chứa B vuông góc với CM, (Q) cắt d tại N. Chứng minh tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.



<u>*Giải.*</u>

*Cách tính (Q): Hạ $BK \perp MC$. Gọi B' là trung điểm AC.

$$\left.\begin{array}{l} BB' \perp AC \\ BB' \perp AM \end{array}\right\} \Rightarrow BB' \perp (MAC).$$

Vậy: $\left.\begin{array}{l} BB' \perp MC \\ BK \perp MC \end{array}\right\} MC \perp (BB'K) \Rightarrow B'K \times AM = N$

* Chứng minh tứ diện MNBC có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

Ta có: $MN \perp BC$ (vì $MN \perp (ABC)$) (1)

và $MC \perp (NBK) \Rightarrow MC \perp NB$ (2)

Ta cần chứng minh: $NC \perp MB$. Xét mặt phẳng chứa MB đó là mặt (MBB').

$BB' \perp (MNC) \equiv (MAC) \Rightarrow BB' \perp NC$ (3)

Xét trong ΔMNC thì B' là trực tâm $\Rightarrow MB' \perp NC$ (4)

từ (3) và (4) $\Rightarrow NC \perp (MBB') \Leftrightarrow MB \perp NC$ (5)

Từ (1), (2), (5) suy ra MNBC có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

Bài 287. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các đỉnh M cách đều hai điểm cố định AB là mặt phẳng đi qua trung điểm AB và vuông góc với AB. (mặt phẳng đó gọi là trung trực AB).

Giải

Gọi (P) mặt phẳng đi qua O là trung điểm AB và vuông góc với AB luôn luôn có duy nhất.

Gọi M cách đều AB tức là: $MA = MB \Rightarrow MO \perp AB$, do tính duy nhất nên $MO \in (P)$.

II. Bài tập tự giải

Bài 288. Cho tứ diện ABCD có: $AB \perp CD, AC \perp BD$. Chứng minh rằng:

a) Hình chiếu của một đỉnh lên mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.

b) $AD \perp BC$.

Bài 289. Cho hình chóp SABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là trực tâm ΔABC. K là trực tâm ΔSBC. Chứng minh: $HK \perp (SBC)$.

Bài 290. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. M, N lần lượt là trung điểm của AB và C'D'. Chứng minh rằng MN vuông góc (CDA'B').

Bài 291. Cho tam diện Oxyz trong đó $\widehat{xOy} = \widehat{xOz} = 45^0$, $\widehat{yOz} = 60^0$. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt đặt các đoạn OA = a; $OB = OC = a\sqrt{2}$, Ot là nửa đường thẳng vuông góc với mặt (Ox, O).

a) Chứng minh $OA \perp (ABC)$.

b) Chứng minh Ox, Oy, Ot thuộc cùng một mặt phẳng.

Bài 292. Cho hình chóp SABC, SA = SB = SC, I là trung điểm của cạnh AC, AB = BC.

a) Chứng minh đường phân giác ngoài góc ASC vuông góc (SBI).

b) Phân giác ngoài góc $\widehat{ASC}$ và các đường phân giác trong của các góc $\widehat{ASB}$ và $\widehat{BSC}$ cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài 293. Cho A, B, C ba điểm không thẳng hàng, tìm những điểm cách đều ba điểm A, B, C.

Bài 294. Cho tứ diện ABCD, $AB \perp (BCD)$, ΔBCD vuông ở C. Chứng minh rằng bốn mặt tứ diện là những tam giác vuông.

Bài 295. Chứng minh rằng nếu mặt phẳng (P) và đường thẳng a cùng vuông góc với Δ thì a//(P) hoặc $a \in (P)$.

Bài 296. Trong mặt phẳng P cho đường trong (C) đường kính AC = 2R. Gọi $H \in AC$; $AH < 2R$. Một đường thẳng (Δ) đi qua H cắt đường trong (C) tại hai điểm B và D. Một điểm S cố định $SA \perp (P)$, SA = h. Mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc với SC cắt các đường SB, SC, SD, SH lần lượt tại B_1, C_1, D_1, H_1.

a) Chứng minh $AB_1C_1D_1$ nội tiếp.

b) Đường thẳng Δ thoả mản điều kiện gì để H_1 là trung điểm của B_1D_1?

c) Đường thẳng Δ thoả mản điều kiện gì để $AB_1C_1D_1$ là hình vuông?

Bài 297. Cho tứ diện ABCD có các cạnh bằng nhau. H là hình chiếu của D lên mặt (ABC). I là trung điểm của DH. Chứng minh tứ diện IABC có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

Bài 298. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a, SA $\perp$ (ABCD), SA = a.

a) Chứng minh các mặt bên hình chóp đều là tam giác vuông. Hãy tính các cạnh của hình chóp.

b) Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại B_1, C_1, D_1. Chứng tỏ tứ giác $AB_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích tứ giác đó.

Bài 299. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M, N là hình chiếu của A lên SB, SC. Chứng minh: $SC \perp (AMN)$

Bài 300. Cho ΔABC đều cạnh a, đường thẳng Ax vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm M. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, H là trực tâm ΔMBC, đường thẳng OH cắt Ax tại N.

a) Chứng minh: $OH \perp (MBC)$.

b) Tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Bài tập tự giải

Bài 301. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD hình thang cân với cạnh đáy AB = 2, CD = 1, hai cạnh BC = AD = 1, $SO \perp (ABC)$ trong đó O là trung điểm của AB, SO = 1.

a) Chứng minh rằng điểm cách đều S, A, B, C, D thuộc đường SO, tính khoảng cách từ điểm đó đến mỗi đỉnh hình chóp.

b) Tính góc giữa SO và (SDC).

Bài 302. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thoi cạnh bằng a, Cạnh SA vuông góc với (ABCD), SA = a và $\widehat{ABC} = 60^0$.

a) Tính SB, SC, SD.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh IB = ID.

Bài 303. Cho tứ diện OABC có OA = OB = OC = a. Các góc $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{BOC} = 90^0$.

a) Tính các cạnh còn lại của tứ diện, từ đó suy ra ΔABC là tam giác vuông.

b) Chứng tỏ: $OA \perp BC$.

Bài 304. Cho tứ diện SABC có cạnh $SA \perp (ABC)$. ΔABC vuông ở B.

a) Tìm hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (SBC).

b) Tính độ dài của các cạnh hình chóp biết góc $\widehat{BSC} = 45^0$, SA = AB = a.

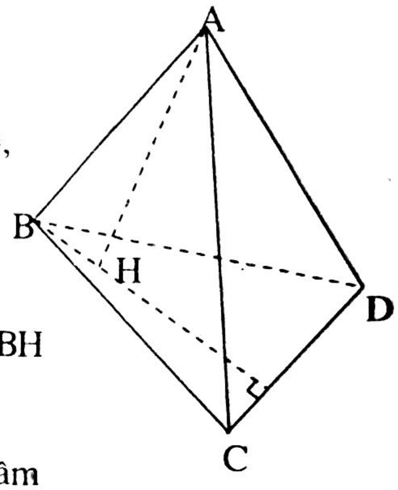
Bài 305. Trong mặt phẳng P cho ΔOAB với OA = OB, AB = 2a, đường cao $OH = h_1$, trên đường thẳng d vuông góc với (P) tại O lấy M với OM = x. Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB, N là giao của đường EF với d.

a) Chứng minh $MB \perp NA$, $MA \perp NB$.

b) Tính BF, BE theo a, h và x.

III. Hướng dẫn giải.

Bài 288.



Chỉ xét hình chiếu A lên mặt phẳng (BCD), các trường hợp khác tương tự.

Gọi hình chiếu A lên (BCD) là H.

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ AB \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH \Rightarrow BH$$

là đường cao.

Tương tự: DH, CH là đường cao $\Rightarrow$ H là trực tâm

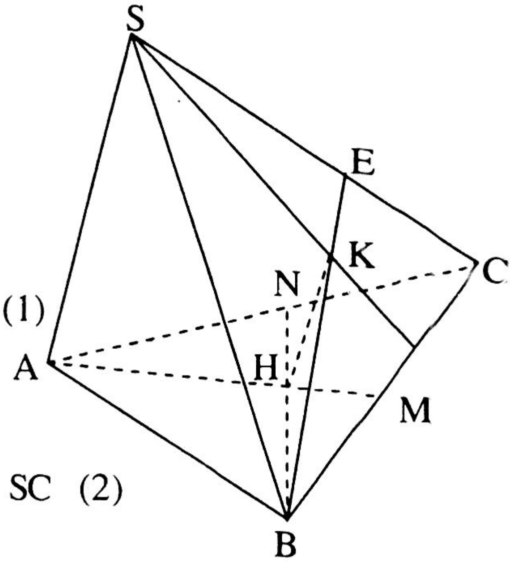
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp AD \text{ (đpcm)}.$$

Bài 289.

Chú ý: Việc chứng minh không phụ thuộc vào trực tâm H nằm ngoài, trong ΔABC.

Theo giả thiết H là trực tâm $\Rightarrow AH \perp BC; BH \perp AC$

.



K là trực tâm ΔSBC

$\Rightarrow BK \perp SC, SK \perp BC$

Ta chứng minh: $HK \perp (SBC)$

Thật vậy:

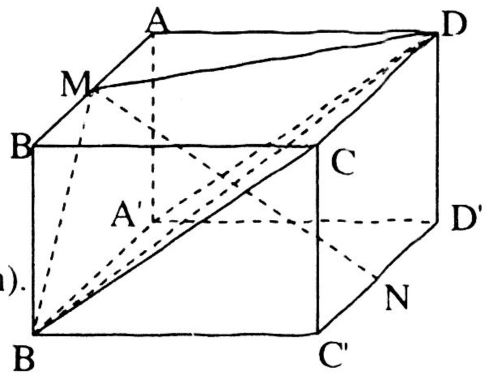
$\left.\begin{matrix} SA \perp BC \\ SM \perp BC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow HK \perp BC \quad (1)$

$BN \perp (SAC)$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} BN \perp SC \\ BE \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (BNE) \Rightarrow HK \perp SC \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK \perp (SBC)$

Bài 290.



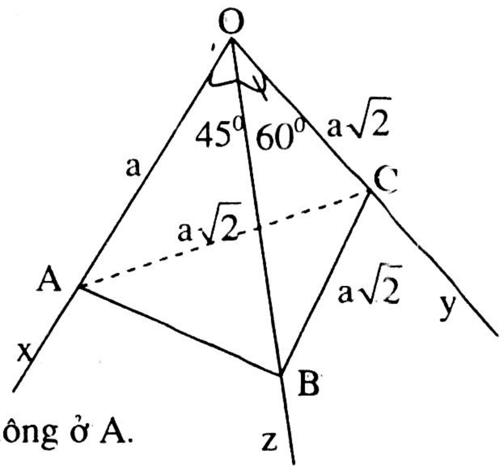
$\left.\begin{matrix} AB // CD \\ AB \perp MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \perp CD \qquad (1)$

Xét $\Delta B'MD$ là tam giác cân

$\Rightarrow MN \perp B'D \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $MN \perp (B'CDD)$ (đpcm).

Bài 291.



Xét ΔAOB có $OA = a$; $OB = a\sqrt{2}$

$\widehat{AOB} = 45^0 \Rightarrow \Delta AOB$ vuông ở A

$\Rightarrow OA \perp AB \qquad (1).$

Tương tự.

Xét ΔAOC vuông ở A $\Rightarrow OA \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA \perp (ABC)$

và ΔABC có $AC = a$, $AB = a \Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở A.

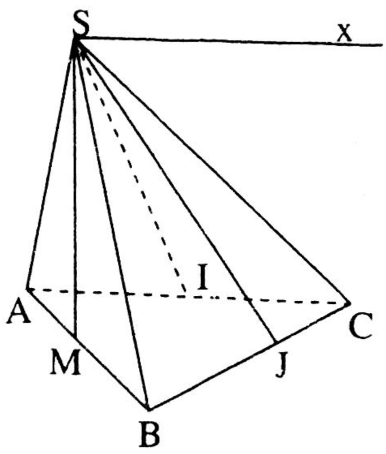
Vậy $Ot \perp (Ox, Oz) \Leftrightarrow Ot \perp (AOB)$

và ta thấy $AC \perp (AOB) \Rightarrow Ot // AC$

.

hay $Ot \in (AOC) \Rightarrow Ot \in (Ox, Oy)$.

Bài 292.



a) Ta thấy ΔSAB, ΔSAC, ΔSBC cân.

Phân giác trong $\widehat{ASB}$ là SM, của $\widehat{ASC}$ là SI, của $\widehat{BSC}$ là SJ.

Phân giác ngoài góc $\widehat{ASC}$ là Sx.

$Sx \perp SI \Rightarrow Sx // AC$

mà ΔABC cân ở B

$\Rightarrow BI \perp AC \Rightarrow AC \perp (SBI)$

b) Mặt phẳng SM, SJ, Sx xác định bởi Sx và MJ, Sx//MJ.

Bài 293.

<u>*Cách 1:*</u>

Xét các điểm cách đều hai điểm AB là mặt trung trực AB.

Xét các điểm cách đều hai điểm BC là mặt trung trực BC.

Các điểm cách đều A, B, C là giao tuyến hai mặt trục AB và BC.

<u>*Cách 2:*</u>

Gọi M cách đều A, B, C thì MA = M = MC. Khi đó hình chiếu của MA, MB, M lên mặt phẳng (ABC) bằng nhau.

Gọi hình chiếu đó là O thì O là tâm vòng tròn ngoài tiếp ΔABC.

Vậy $M \in (\Delta)$ đi qua O và (Δ) vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bài 294.

Chỉ xét mặt: ACD.

$$\left.\begin{matrix} DC \perp BC \\ DC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow DC \perp (ABC) \Rightarrow DC \perp AC \Rightarrow \Delta ACD \text{ vuông ở C.}$$

Bài 295.

Giả sử:

$$\left.\begin{matrix} (P) \perp (\Delta) \\ a \perp (\Delta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // (P) \text{ hoặc } a \in (P).$$

Thật vậy:

Nếu a và (P) không có điểm chung thì a// (P).

Nếu a và (P) có một điểm chung A' qua A'. Kẻ a' đi qua A. Xét mặt phẳng Q chứa a' và a thì $Q \perp (\Delta)$ chứa $A \Rightarrow (P) \equiv Q \Rightarrow a \in (P)$.

Bài 296.

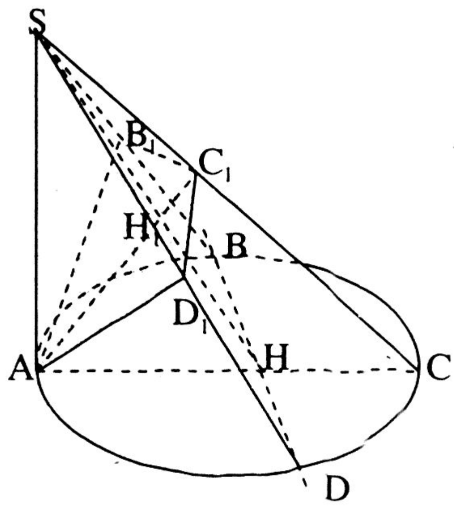
a) Gọi Q đi qua A vuông góc SC. Suy ra:

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \perp SC \\ BC \perp (SAB_1) \Rightarrow BC \perp AB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp B_1C_1.$$

Tương tự: $AD_1 \perp (SDC) \Rightarrow AD_1 \perp D_1C_1$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AB_1C_1D_1$ có : $\widehat{B_1} = \widehat{D_1} = 1v$

$\Rightarrow$ nội tiếp đường tròn đường kính AC_1.



b) Điều kiện để H_1 là trung điểm B_1D_1 xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $B_1D_1 \perp AC_1$ tại H_1

Trường hợp 2: B_1D_1 đi qua trung điểm của AC_1.

Trường hợp 1:

$B_1D_1 \perp AC_1 \Leftrightarrow AB_1 = AD_1$

và $AB \perp SB_1$; $AD_1 \perp SD_1$ đây là hai đường cao của ΔSAB và $\Delta SAD \Leftrightarrow AB = AD$

Trường hợp 2:

H_1 là trung điểm của AC_1

Khi đó: $AC = 2R$; $SH = l_1$

$$AC_1 = \frac{2Rh}{\sqrt{4R^2 + h^2}}; \ AH_1 = \frac{Rh}{\sqrt{4R^2 + h^2}}$$

Tính $AH = x$?

Kẻ $C_1K // SH$, xét ΔCSH ta có:

$$\frac{2R - 2x}{2R - x} = \frac{CC_1}{CS} = \sqrt{\frac{4R^2 - \dfrac{4R^2h^2}{4R^2 + h^2}}{h^2 + 4R^2}} = \sqrt{\frac{\left(4R^2\right)^2}{\left(h^2 + 4R^2\right)^2}} = \frac{4R^2}{h^2 + 4R^2}$$

Vậy $x = \dfrac{Rh^2}{h^2 + 2R^2}$.

Vậy khi H cách A một đoạn $AH = \dfrac{Rh^2}{h^2 + 2R^2}$ đường thẳng đi qua H và vuông góc với AC. (AB=AD)

Bài 297.

Ta thấy ΔAIB cân; ΔBIC cân

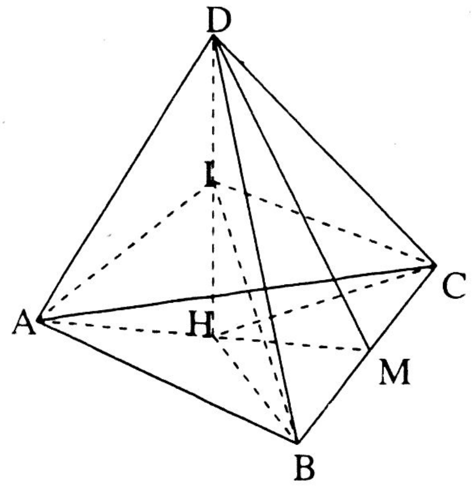
$$DH^2 = DA^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$\Rightarrow DH = \sqrt{\frac{2}{3}}a$

$IH = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $HM = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$IM^2 = IH^2 + HM^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow IM = \frac{a}{2}.$



Vậy ΔBIC vuông cân vì $IM = \frac{1}{2}BC$.

Tương tự ΔAIB vuông cân; ΔAIC vuông cân.

Nên $IA \perp IB$ và $IA \perp IC$ (đpcm).

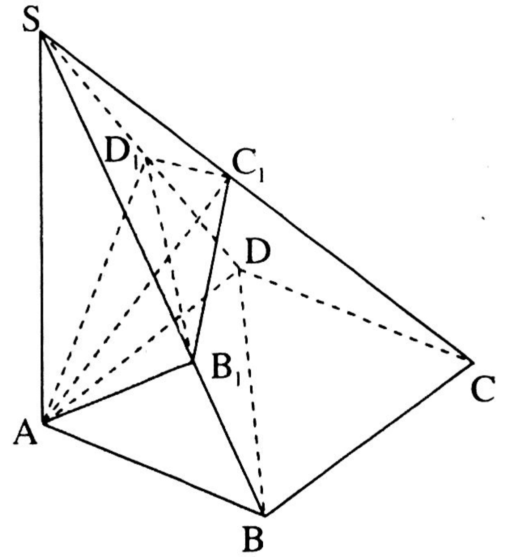
Bài 298.

a) Theo định lý ba đường vuông góc thì:

$SB \perp BC$; $SD \perp DC \Rightarrow SB = a\sqrt{2} = SD$; $SC = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

b) Từ A kẻ $AB_1 \perp SB$; $AC_1 = SD \Rightarrow (Q) \equiv (AB_1C_1)$.

(đọc giả tự chứng minh)



Do $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow B_1D_1 // DB$

mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC_1$

$\Rightarrow B_1D_1 \perp AC_1$

Suy ra tứ giác $AB_1C_1D_1$ có hai đường chéo $B_1D_1 \perp AC_1$.

Tính diện tích tứ giác $AB_1C_1D_1$ ta có:

$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}B_1D_1.AC_1$

Ta có: $B_1D_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

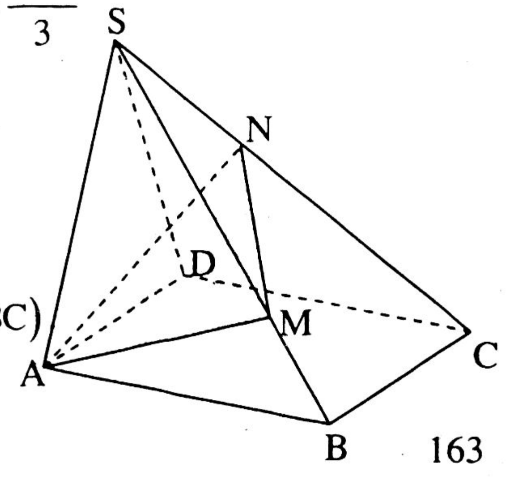
Xét $\Delta SAC \Rightarrow SC = a\sqrt{3} \Rightarrow AC_1 = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{12}}{12} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Bài 299.

Xét mặt (SBC) có:

$\left.\begin{array}{l} AM \perp SB \\ AM \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB)) \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$



$\Rightarrow AM \perp SC$

mà $AN \perp SC \Rightarrow SC \perp (AMN)$ (đpcm).

Bài 300.

a) Xét mặt: $(MAI) \Rightarrow BC \perp (AMI) \Rightarrow BC \perp OH$ (1)

Xét mặt: $(BOH) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} BH \perp MC \\ BO \perp (MAC) \end{array}\right\} \Rightarrow BO \perp MC \Rightarrow MC \perp (BOH)$

$\Rightarrow MC \perp OH$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \perp (MBC)$ (đpcm)

b) Ta có: $MN \perp BC$ $(\text{vì } MA \perp (ABC))$.

Cần chứng minh: $MB \perp NC$

Xét mặt (NHC) có:

$\left.\begin{array}{ll} CH \perp MB & (\text{CH trực tâm}) \\ NH \perp MB & (NH \perp (MBC)) \end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp (NHC) \Rightarrow MB \perp NC$ (đpcm).

Chứng minh $MC \perp NB$ tương tự.

Bài 301.

a) Ta nhận thấy:

$OA = OB = 1$;

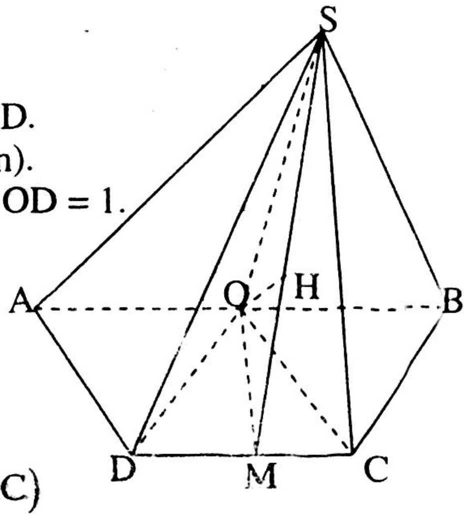
$AD = OC = DC = 1 \Rightarrow OD = 1$

$OC = OB = SO = 1$.

Vậy điểm O cách đều các điểm S, A, B, C, D.

(Học sinh có thể tổng quát hoá bài toán trên).

Tính khoảng cách: $OS = OA = OB = OC = OD = 1$.



b) Góc giữa SO và mặt phẳng (SDC).

Xác định góc:

Xác định hình chiếu SO lên mặt (SDC).

Kẻ $OH \perp SM$ (M là trung điểm DC).

Ta thấy:

$DC \perp (SMO) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OH \perp SM \\ OH \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SDC)$

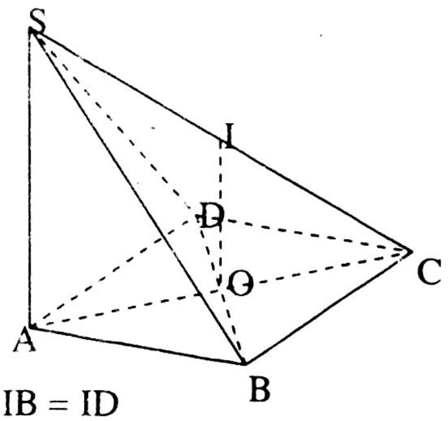
Suy ra hình chiếu SO là SM $\Rightarrow$ góc giữa mặt và SO là góc $\widehat{HSO}$.

Tính $\widehat{HSO}$.

Xét ΔSOM vuông ở O.

$OM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan \widehat{HSO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy góc đó có số đo α: $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

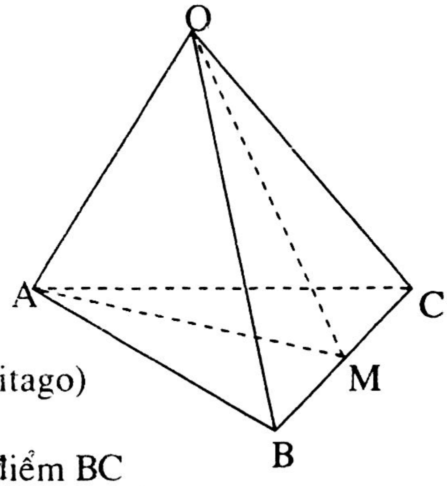


Bài 302.

a) Sử dụng định lí Pitago:

$SB = SD = a\sqrt{2}$; $AC = a$; $SC = a\sqrt{2}$.

b) $IO \,//\, SA \Rightarrow IO \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp DB \Rightarrow IB = ID$



Bài 303.

a) Tính các cạnh:

$AB = AC = a$;

$BC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ có góc A bằng 90^0. (theo định lý Pitago)

b) Theo định lí.

Xét ΔABC và ΔBOC cân $\Rightarrow$ Gọi M là trung điểm BC

$\Rightarrow BC \perp mp(AOM) \Rightarrow OA \perp BC$.

Bài 304. (Đọc giả tự chứng minh).

Bài 305. Gợi ý

$MB \perp NA$ và $MA \perp NB$.

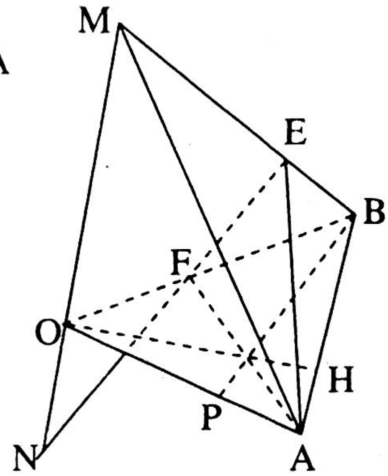
Xét mặt (ENA) có:

$$\left.\begin{matrix} AF \perp OB \\ AF \perp MO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AF \perp (OMB)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} MB \perp AF \\ MB \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow MB \perp (ENA) \Rightarrow MB \perp NA \text{ (đpcm)}$$

Xét tứ diện MNAB ta có: $MN \perp AB$; $MB \perp NA$

Cặp thứ 3: $MA \perp NB$ (đpcm).



PHẦN 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. Kiến thức cơ bản

I. Góc giữa hai mặt phẳng.

1. Định nghĩa:

Giả sử hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo giao tuyến c. Từ A bất kỳ thuộc c trong α dựng đường thẳng $a \perp c$, trong β dựng $b \perp c$. Gọi góc giữa hai đường (a, b) là góc giữa hai mặt phẳng α và β. Kí hiệu (α, β).

Góc giữa $(\alpha, \beta) < 90^0$.

Nếu $\alpha // \beta$ hoặc $\alpha \equiv \beta$ thì $(\alpha, \beta) = 0^0$

Nhận xét: Cho hai mặt phẳng α và β có: $d \perp \alpha$; $d' \perp \beta \Rightarrow (d, d') = (\alpha, \beta)$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc:

Hai mặt phẳng α và β gọi là vuông góc với nhau nếu $(\alpha, \beta) = 90^0$ thì khi đó kí hiệu $\alpha \perp \beta$ hoặc $\beta \perp \alpha$.

3. Tính chất:

Cần và đủ để $\alpha \perp \beta$ là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Nếu $\alpha \times \beta = d$ và $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ thì giao tuyến $d \perp \gamma$.

Nếu $\alpha \perp \beta$ và có hai Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ và $\overrightarrow{n_\beta}$ thì $\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta} = 0$.

4.Hình lăng trụ đứng: là hình lăng trụ mà cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

5. Hình chóp đều: là hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu đỉnh rơi trọng tâm đáy.

6. Phần hình chóp giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả cạnh bên của hình chóp được gọi hình chóp cụt.

Nếu hình chóp đều mà phần hình chóp đều nằm giữa đáy và thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh hình chóp đều là hình chóp cụt đều.

7. Tính chất hình chóp đều

Các cạnh bên hình chóp đều bằng nhau.

Các mặt bên hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.

Chân đường cao trùng tâm đáy. (Tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy).

Cắt thiết diện song song đáy được thiết diện bên là đa giác đều đồng dạng với đáy.

8. Tính chất hình chóp cụt đều.

Các mặt bên của chóp cụt đều là các hình thang cân bằng nhau.

Nếu kéo dài các cạnh bên hình chóp cụt đều thì đồng quy tại một điểm.

Độ dài nối tâm hai đáy là đường cao hình chóp cụt đều.

Một số vấn đề cần ghi nhớ.

1. Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) với nhau bằng hai cách.

Cách 1: Chứng minh góc phẳng của nhị diện $(\alpha, \beta)=90^0$.

Cách 2: Một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

2. Chứng minh ΔABC vuông.

Cách 1: Dùng định lý Pitago.

Cách 2: Nếu trung tuyến $AM \in BC$ và $AM = \frac{1}{2}BC$ thì vuông ở A.

3. Tứ diện ABCD đều. H là tâm giác giác đều BCD thì $AH \perp (BCD)$.

4. Tứ diện đều là tứ diện có 6 cạnh bằng nhau và có 4 mặt là tam giác đều.

5. Tứ diện SABC có SA = SB = SC và ΔABC đều gọi là hình chóp tam giác đều đỉnh S, đáy là ΔABC đều.

6. Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông.

7. Tứ diện gần đều là tứ diện có 4 mặt là 4 tam giác bằng nhau. Trong một tứ diện gần đều các cặp cạnh đối bằng nhau, các góc tam diện bằng nhau.

8. Định lý Talet trong không gian: Ba mặt phẳng song song chắn hai cắt tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tỉ lệ.

9. Chứng minh một đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng (α) bằng hai cách.

Cách 1: Đường $d \perp a$; $d \perp b$ với $a, b \in \alpha$ và $a \times b$.

Cách 2: $d \in \beta$ mà $\beta \perp \alpha$ thì $d \perp$ giao tuyến.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng α và β vuông góc với nhau

Phương pháp giải:

Chứng minh α hoặc β chứa một đường thẳng vuông góc với đường thẳng kia.

Góc giữa hai mặt phẳng bằng 90^0.

Tích vô hướng hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng bằng 0.

Chứng minh $\alpha \perp \beta$ khi $\alpha \perp \gamma$ mà $\gamma // \beta$.

Bài 306. Trong mặt phẳng α cho tam giác ABC vuông ở B. Kẻ đoạn thẳng AD vuông góc với α tại A. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt (ABC) và (DBC).

b) Mặt (ABD) vuông góc với mặt (BCD).

c) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với DB lần lượt cắt DB và DC tại H và K. Chứng minh: HK//BC.

Giải.

a) Phương pháp:

Chọn giao tuyến 2 mặt phẳng.

Tìm một điểm thuộc giao tuyến có hai đường thẳng thuộc hai mặt phẳng vuông góc với giao tuyến.

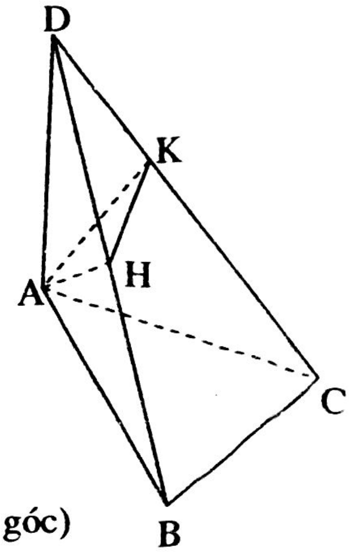
Giao tuyến BC, tại B ta có:

$AB \in (ABC), DB \in (BDC)$

$AB \perp BC$ (1) ($\widehat{B} = 90^0$)

$DB \perp BC$ (2) (theo định lý 3 đường vuông góc).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt (ABC) và (DBC).



b) Chứng minh dựa vào một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

Ta có: $BC \perp (ABD)$ (theo định lý 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow (BCD) \perp (ABD)$.

c) $(AHK) \perp DB$ tại H $\Rightarrow \left.\begin{matrix} KH \perp DB \\ BC \perp DB \end{matrix}\right\} \Rightarrow KH // BC$ (Vì KH và $BC \in (BCD)$

Bài 307. Cho hai mặt phẳng α và β cắt nhau và một điểm M không thuộc α và β. Chứng minh rằng qua M chỉ có một mặt phẳng P vuông góc α và β. Nếu α//β thì kết quả trên sẽ thay đổi thế nào?

Giải.

$\alpha \cap \beta = d$. Qua M dựng P vuông góc d. Khi đó: $P \perp \alpha$ và $P \perp \beta$ vì α chứa d và β chứa d. Do tính duy nhất mặt phẳng đi qua một điểm vuông góc với đường thẳng d nên P duy nhất.

Nếu α //β gọi đường thẳng d đi qua M và $d \perp \alpha$, $d \perp \beta$ nên mọi mặt phẳng P chứa d. P vuông góc với α và P vuông góc với β. Vậy có vô số mặt phẳng P đi qua M vuông góc với α và β.

Bài 308. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Chứng minh rằng

a) Mặt (AB'C'D) $\perp$ (BCD'A').

b) Đường $AC' \perp (A'BD)$.

Giải.

a) *Cách 1.*

$(AB'C'D) \cap (BCA'D') = OO'$.

Vì ABCDA'B'C'D' là hình lập phương nên O'//AD//B'C'.

ADB'C' là hình chữ nhật $\Rightarrow AO \perp OO'$; $BO \perp OO'$.

Góc giữa hai mặt là: $\widehat{BOA} = 90^0 \Rightarrow$ 2 mặt vuông góc với nhau.

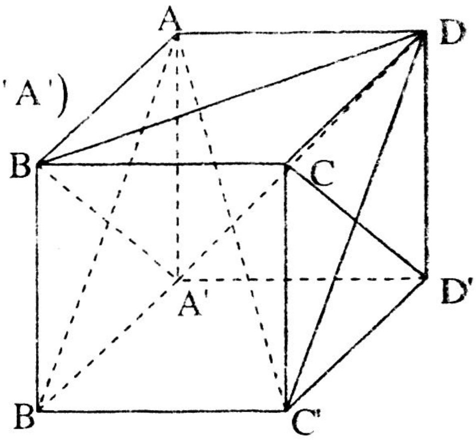
Cách 2.

(ADB'C') chứa DC':

$DC' \perp CD'$ (vì CDD'C' hình vuông)

$C'D \perp BC$ $(\text{vì } C'D \perp AD)$

$C'D \perp (BCD'A') \Rightarrow (ADB'C') \perp (BCD'A')$



b) Chứng minh: $AC' \perp (A'BD)$

Thật vậy: xét mặt (AB'C') thì

$$\left.\begin{array}{l} BA' \perp AB' \\ BA' \perp B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow BA' \perp (AB'C')$$

$\Rightarrow BA' \perp A'C'$ (1)

Tương tự xét mặt AC'D' ta có:

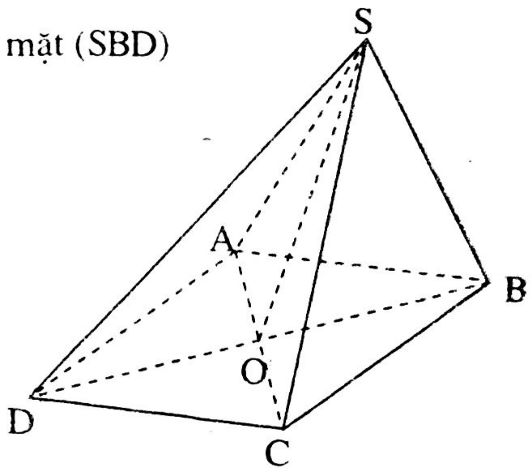
$$\left.\begin{array}{l} A'D \perp AD' \\ A'D \perp C'D' \end{array}\right\} \Rightarrow A'D \perp (AC'D') \Rightarrow A'D \perp AC' (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC' \perp (A'BD)$ (đpcm)

Bài 309. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a có SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt (SBD)

b) Tam giác SBD là tam giác vuông



Giải

a) Gọi O là tâm hình thoi.

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD) \text{ (đpcm)}$$

b) Chứng minh ΔSBD vuông

Thật vậy: $\Delta ASC = \Delta ABC \Rightarrow OS = OB$

$\Leftrightarrow OS = \frac{1}{2}DB$

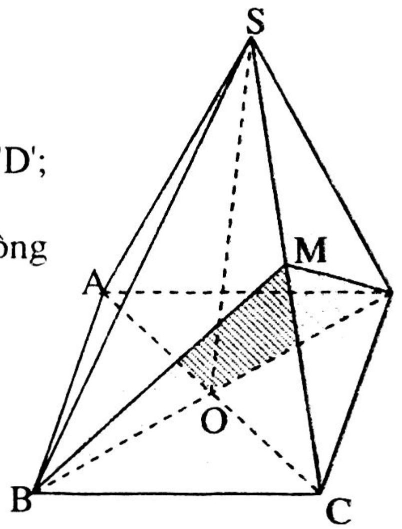
$\Rightarrow \Delta DSB$ vuông ở S.

(Đường trung tuyến bằng $1/2$ cạnh đáy).

Bài 310. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'; AB = a; BC = b; CC' = c.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC'B') vuông góc với mặt (ABB'A').

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c.



Giải.

a) Chứng minh: $(ADB'C') \perp (ABB'A')$.

Thật vậy:

$AD \perp (ABB'A)$

mà $AD \in (ADB'C') \Leftrightarrow (ADB'C') \perp (ABB'A')$

b) $AC'^2 = A'C'^2 + AA'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 + AA'^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Bài 311. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có các cạnh bên và cạnh đáy bằng a. Gọi O là tâm của đáy ABCD.

a) Tính độ dài đoạn thẳng SO.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh: $(MBD) \perp (SAC)$.

c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt (MBD) và (ABCD).

Giải.

a) SA = SB = SC = SD = AB = AD = BC = CD = a;

$AC = a\sqrt{2}$

$SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta thấy: $BO \perp (SAC) \Rightarrow (BMD) \perp (SAC)$

(vì $BD \in (BMD)$).

c) ΔSOC vuông cân: $\Rightarrow \widehat{COM} = 45^0$

Góc giữa mặt phẳng (MBD) và mặt (ABCD) là góc $\widehat{CDM} = 45^0$; $OM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}a$.

Bài 312. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh a và có góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt (ABCD).

a) Chứng minh $(SBD) \perp (SAC)$.

b) Trong ΔSCA kẻ $IK \perp SA$ tại K. Hãy tính độ dài IK.

c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^0$ và từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.

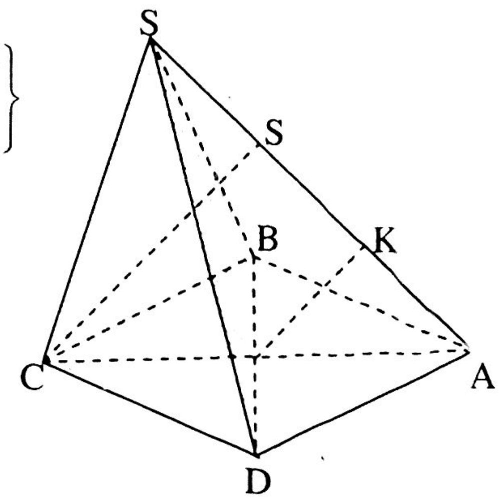
Giải

a)

$\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \quad \text{(đường chéo hình thoi)} \\ BD \perp SC \quad (\text{vì } SC \perp (ABCD)) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$ vì $BD \in (SBD)$



b) *Cách 1:* Kẻ CL // IK; $IK = \frac{1}{2}CL$

$$CL = \frac{SC.CA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{SA}$$

$$SA = \sqrt{\frac{6a^2}{4} + 3a^2} = a\sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

$$CL = \frac{a\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = a \Rightarrow IK = \frac{a}{2}.$$

<u>*Cách 2:*</u> Xét 2 ΔIAK đồng dạng $\Delta SAC \Rightarrow IK = \frac{a}{2}$.

b) $IK = \frac{a}{2}$ và $BD = a \Rightarrow \Delta BKD$: $\widehat{BKD} = 90^0 \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$ (đpcm).

II. Bài tập tự giải.

Bài 313. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Chứng minh $(SDC) \perp (SAD)$.

Bài 314. Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C' có cạnh đáy và cạnh bên bằng a. Gọi M, N, E lần lượt là điểm giữa các cạnh BC, CC', C'A', gọi (P) là mặt phẳng qua M, N, E. Chứng minh $(P) \perp (AA'B'B)$.

Bài 315. Trong mặt phẳng α cho hình thang vuông ABCD vuông ở A và D, AB = 2CD, CD = AD ,vẽ $Ax \perp (\alpha)$. Trên Ax lấy S sao cho SA = AB, E là trung điểm của SB. Chứng minh $(SDC) \perp (SAD); (SBC) \perp (ADE)$.

Bài 316. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hai mặt bên vuông góc với đáy, hai mặt khác tạo với đáy một góc α. Hãy xác định đường cao hạ từ S.

Bài 317. Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc có giao tuyến Δ.

a) Chứng minh rằng (R) là mặt phẳng cắt (Q) và (P) lần lượt theo hai giao tuyến D_1, D_2 vuông góc với nhau thì $\Delta \perp D_1$ hoặc $\Delta \perp D_2$

b) Cho A là điểm ở ngoài (P) và (Q) hãy chỉ ra cách dựng qua A một mặt phẳng d cắt (P) và (Q) theo giao tuyến vuông góc với nhau.

Bài 318. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không thuộc một mặt phẳng và cho $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = 60^0; \widehat{zOx} = 90^0$, lấy A, B, C lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz sao cho OA = OB = OC. Chứng minh: $(ABC) \perp (AOC)$.

Bài 319. Cho tứ diện SABC, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau và có $SA \perp (ABC)$, $SB = a\sqrt{2}; \widehat{BSC} = 45^0; \widehat{ASB} = \alpha$.

a) Chứng minh $BC \perp SB$. Tìm điểm cách đều S, A, B, C.

b) Xác định α để (SCA) và (SCB) tạo với nhau góc 60^0.

Bài 320. Cho hình vuông ABCD, một điểm S trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh: $(SHC) \perp (SDI)$.

Bài 321. Cho hình chữ nhật ABCD với O là tâm và có AB = a; BC = 2a. Kẻ $Ox \perp (ABCD)$, trên Ox lấy điểm S sao cho SO = h. M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

a) Tính góc giữa mặt (SMN) và các mặt (SAB), (SCD). Tìm hệ thức liên hệ giữa h, a để $(SMN) \perp (SAB)$ và $(SMN) \perp (SCD)$.

b) Tính góc giữa mặt (SAB) và (SCD). Tính h theo a để hai mặt đó vuông với nhau.

Bài 322. Cho hình chóp tam giác đều SABC. Chứng minh:

a) Mỗi cạnh bên của hình chóp đều vuông góc cạnh đáy đối diện.

b) Mỗi mặt phẳng chứa một cạnh bên và đường cao hình chóp vuông góc với cạnh đối diện.

Bài 323. Cho tam giác cân ABC. AB = AC, $\widehat{BAC} = 120^0$. Xét hai tia cùng chiều Bt và Ct' vuông góc với mặt phẳng (ABC). Lấy $B' \in Bt$; $C' \in Ct'$ sao cho BB' = 3CC'.

a) Chứng minh giao tuyến mặt (ABC) và mặt (AB'C') cố định khi B', C' thay đổi.

b) Khi BB' = a. Tính góc giữa (AB'C') với mặt (ABC). Tính diện tích $\Delta AB'C'$.

Bài 324. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ tạo với nhau góc α. Xét hai điểm M, N lần lượt thuộc (P) và (Q). Kẻ $MI \perp \Delta$; $NJ \perp \Delta$. Cho MI = a, NJ = b, JI = c. Tính độ dài MN.

Bài 325. Cho hình chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a, đường cao SO = 2a. Gọi M một điểm thuộc đường cao AA_1 của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc AA_1. Đặt AM = x.

a) Xác định thiết diện giữa mặt phẳng (P) và hình chóp.

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí M để diện tích thiết diện đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập tự giải

Bài 326. (Đề thi Đại học Cao đẳng năm 2003 khối D).

Cho tứ diện ABCD, $AD \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại A, AD = a; AC = b, BC = c.

Tính diện tích ΔBCD theo a, b, c. Chứng minh: $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$.

Bài 327. Cho hình chóp SABC có SA vuông góc với đáy, ABC không phải là tam giác cân. Gọi B',C'là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC.

a) Chứng tỏ BCC'B' là tứ giác nội tiếp có BC và B'C' không song song với nhau.

b) Gọi I là giao của BC và B'C'. Chứng minh: $\widehat{IAB} = \widehat{IAC}$.

Bài 328. Cho hình vuông ABCD thuộc mặt phẳng (P). Trên đường $Ax \perp (P)$ lấy một điểm S bất kỳ, dựng mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc với SC, Q cắt SB, SC, SD tại B', C', D'.

Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{A'BC} = \widehat{AC'C} = \widehat{AD'C} = \widehat{ADC} = 90^0$.

Bài 329. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'.

a) Tính góc tạo bởi các đường thẳng AC' và A'B.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh A'B', BC, DD'. Chứng minh $AC' \perp (MNP)$.

Bài 330. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thoi, AB = SB = a; $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, SO vuông góc với mặt đáy.

a) Chứng minh ASC là tam giác vuông.

b) Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$.

III. Hướng dẫn giải.

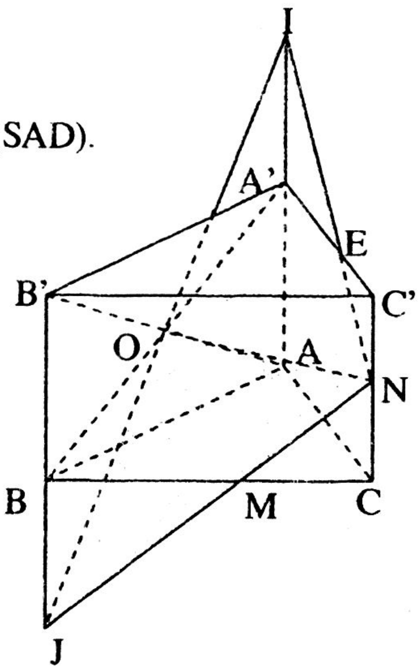
Bài 313.

Phương pháp giải.

Tìm đường thẳng thuộc (SDC) vuông góc với (SAD).

Áp dụng định lý 3 đường vuông góc $DC \perp (SAD), DC \in (SDC) \Rightarrow (SDC) \perp (SAD)$.

Bài 314.



Chứng minh: $(MNE) \perp (AA'B'B)$.

Chứng minh: $EM // (AA'B'B)$.

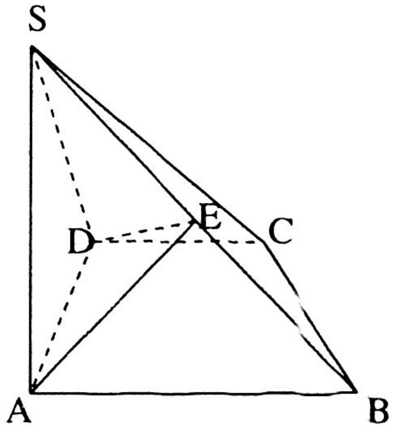
IJ đi qua tâm $(AA'B'B)$.

$\Rightarrow ON \perp (AA'B'B) \Rightarrow (MEN) \perp (AA'B'B)$

Bài 315.

Chứng minh: $(SDC) \perp (SAD)$

Thật vậy: $DC \perp (SAD)$ (theo định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow (SDC) \perp (SAD)$.



$(ADE) \perp (SBC) \Leftrightarrow$ Chứng minh

$SB \perp (ADE)$.

Thật vậy: ΔSAD vuông cân

$\Rightarrow AE \perp SB$; $AD \perp (SBA) \Rightarrow AD \perp SB$.

Bài 316.

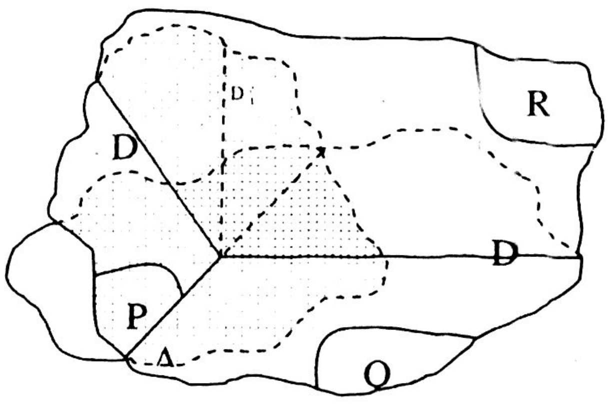
Sử dụng mệnh đề hai mặt phẳng cắt nhau vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ 3. Vậy đường cao là giao tuyến hai mặt bên vuông góc với đáy.

Bài 317.

a) Gọi M là giao điểm (R) với $\Delta \Rightarrow M \in d_1$ hoặc $M \in d_2$. Giả sử d_1 không vuông Δ.

Trong (P) dựng d'_1 đi qua M $d'_1 \perp \Delta \Rightarrow d'_1 \perp Q \Rightarrow d'_1 \perp d_2 \Rightarrow d_2 \perp (P)$ vì $(d_2 \perp d_1$ và $d_2 \perp d'_1) \Rightarrow d_2 \perp \Delta$.

b) Theo kết quả trên thì gọi hình chiếu của A là K và L lên mặt phẳng P và Q. Giả sử qua A dựng R cắt P và Q theo d_1 và d_2 sao cho $d_1 \perp d_2$ thì giả sử $d_1 \perp \Delta \Rightarrow d_1 \perp Q \Rightarrow d_1 // AL$



R chứa AL và $L \in d_2$ suy ra cách dựng.

Lấy d_2 qua L cắt Δ tại M.

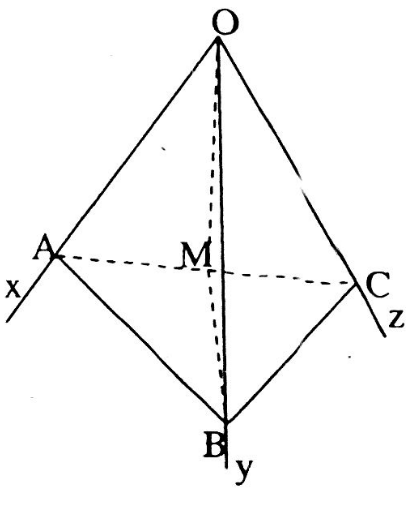
$d_1 // AL$ suy ra R chứa d_1 và Al cần dựng.

Bài 318.

Gợi ý: ΔAOC vuông ở O $\Rightarrow AC = \sqrt{2}OA \Rightarrow$ ABC vuông ở B.

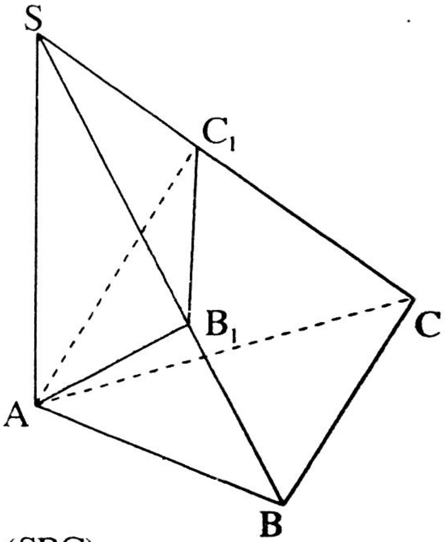
Kẻ Om trung tuyến $\Rightarrow$ MB là trung tuyến (hoặc đường cao).

$OM = BM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta OMB$ là tam giác vuông.



Bài 319.

a) Cho tứ diện SABC



$$\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(SBC)\\(SAB)\perp(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)$$

$\Rightarrow$ SAC vuông ở A, cạnh huyền SC.

SBC vuông ở B cạnh huyền SC.

$\Rightarrow$ điểm cách đều SABC là trung điểm SC.

b)

$$\left.\begin{array}{l}AB_1\perp SB\\AC_1\perp SC\end{array}\right\}\Rightarrow(AB_1C_1)\perp SC$$

$\Rightarrow \widehat{AC_1B_1}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Vì $(SAB)\perp(SBC)\Rightarrow \Delta AB_1C_1$ vuông ở B_1

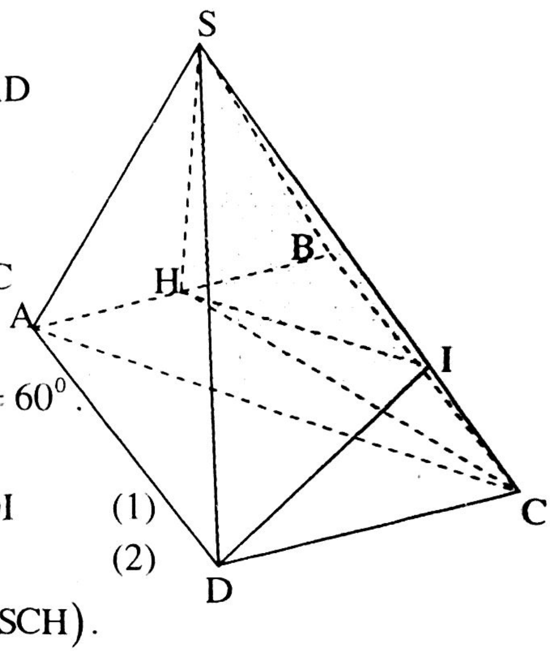
$\Rightarrow AB_1 = C_1B_1\tan 60^0;\ AB_1 = SB_1\tan\alpha;\ B_1C_1 = SB_1\sin 45^0$

$\Rightarrow AB_1 = SB_1\tan 60^0\sin 45^0 = SB_1\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (SBC) là 60^0 khi $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài 320.

a) H là trung điểm của AB:



$\Rightarrow SH\perp AB \Rightarrow SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp AD$

$\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD)$.

Tương tự: $(SBC)\perp(SAD)$.

b) Gọi $(SAD)\cap(SBC) = St$ thì St // AD//BC

mà $(SAB)\perp(SAD);\ (SAD)\perp(SBC)$

$\Leftrightarrow$ góc giữa (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{ASB} = 60^0$.

c) Chứng minh: $(SHC)\perp(SDI)$.

Thật vậy ABCD là hình vuông $\Rightarrow CH\perp DI$ (1)

mà $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp DI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DI\perp(SCH)\Rightarrow(SDI)\perp(SCH)$.

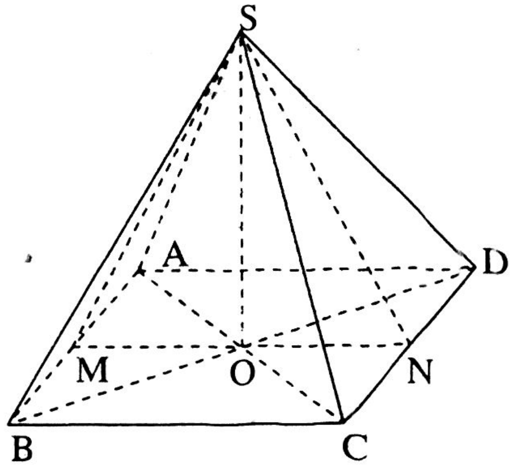
Bài 321.

a) Phương pháp tìm một đường thẳng thuộc (SAB) vuông góc với mặt (SMN).

$AB\perp(SMN)$

vì $\begin{cases} AB \perp MN \\ AB \perp SO \end{cases} \Leftrightarrow (SMN) \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SMN) \perp (SCD)$



$CD \perp (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (SCD)$

Với a, h tuỳ ý thì (SMN) vuông góc với (SBC) và vuông góc (SCD).

b) Tính góc giữa (SAB) và (SCD) vì (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với (SMN) nên có giao tuyến St//DC//AB

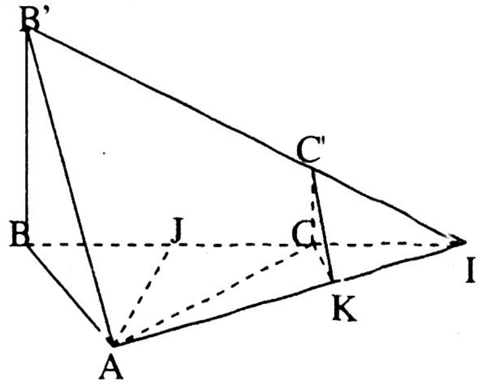
$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $\widehat{MSN}$.

Để $\widehat{MSN} = 1v \Rightarrow SO = \frac{1}{2}MN \Rightarrow SO = h = a$.

Bài 322. (Học sinh tự giải).

Gợi ý: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, tìm một đường thẳng thuộc một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Bài 323.



a)

$\frac{BI}{CI} = 3 \Leftrightarrow BI = \frac{3}{2}BC \Rightarrow$ I cố định và A cố định

$\Rightarrow$ giao tuyến $(ABC) \cap (AB'C') = AI$ cố định.

b)

$BB' = a \Rightarrow CC' = \frac{a}{3}$ (1)

$BC = a\sqrt{3}$, $JI = a\sqrt{3}$, $AJ \perp BC \Rightarrow AJ = \frac{a}{2}$

$CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà

$$\frac{CK}{AJ} = \frac{CI}{AI} = \frac{CK}{a/2} = \frac{a\sqrt{3}/2}{\sqrt{a^2/4 + 3a^2}} \Rightarrow CK = \frac{a^2\sqrt{3}/4}{a\sqrt{13}/4} = a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = a\frac{\sqrt{39}}{26}$$

Góc hai mặt phẳng (ABC) và (AB'C') là góc $\widehat{CKC'} = \varphi$

$$\tan\varphi = \frac{CC'}{CK} = \frac{a/3}{a\sqrt{39}/26} = \frac{26}{3\sqrt{39}} = \frac{2\sqrt{13^2}}{3\sqrt{3}\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{9}.$$

Vậy góc φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C).

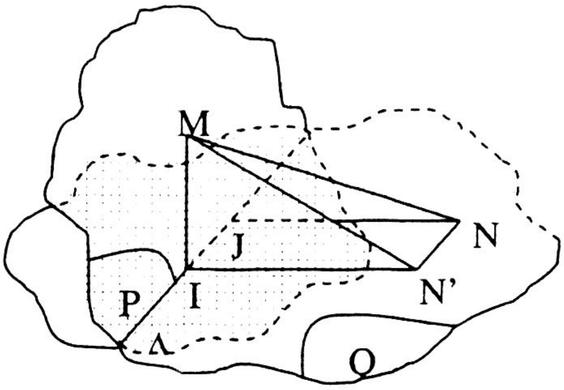
Bài 324.

$(Q,P) = \alpha$.

$MI = a$, $NJ = b$, $IJ = c$.

Tính MN.

Kẻ NN'//IJ.



$NN' = IJ = c \Rightarrow N'I = b \Rightarrow \widehat{MIN'} = \alpha$

và $NN' \perp (MIN')$

$MN'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Xét $\Delta MN'N$ vuông tại N'.

$\Rightarrow MN^2 = MN'^2 + NN'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$

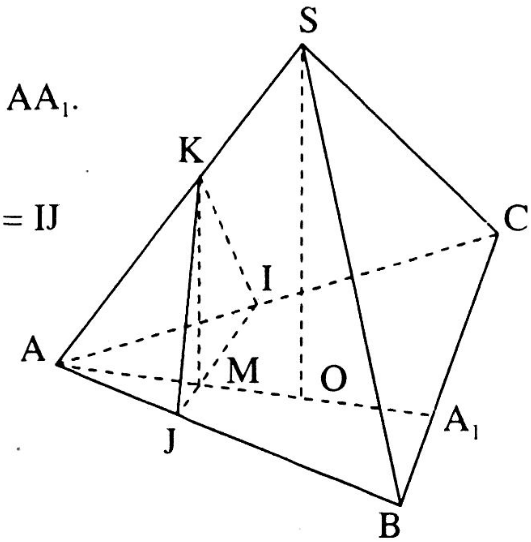
$\Rightarrow MN^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Bài 325.

a) Xác định thiết diện.

Mặt phẳng P đi qua M và vuông góc với AA_1.

(P)//BC, (P)//SO



Xét $M \in AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = IJ$

(P)//SO $\Leftrightarrow$ trong mặt phẳng ASA'

Kẻ MK//OS, $K \in SA \Rightarrow$ thiết diện ΔKIJ, ΔKIJ cân tại K.

Xét $M \in OA_1$ thì thiết diện là hình thang cân.

b) Tính diện tích thiết diện.

Xét trường hợp $M \in AO$ thiết diện JKI tam giác cân.

$S_{\Delta JKI} = \frac{1}{2} IJ.KM$

$\frac{KM}{SO} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow KM = 2x\sqrt{3}$ (1) (vì $AO = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AM = x$, $SO = 2a$)

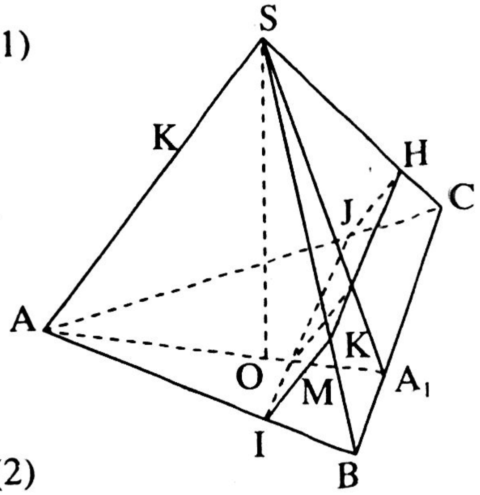
$\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} \Rightarrow IJ = \frac{BC.AM}{AA_1}$ trong đó $BC = a$, $AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AM = x$

$JI = \frac{ax}{a\sqrt{3}/2} = \frac{2x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{IJK} = 2x^2$.

Xét trường hợp: $M \in OA_1$ thiết diện là hình thang cân. Thiết diện IJHK.

$S_{IJHK} = \frac{(KH + JI)MN}{2} \Rightarrow JI = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{HK}{BC}=\frac{SN}{SA_1}=\frac{OM}{OA_1}\Rightarrow HK=\frac{BC.OM}{OA_1} \qquad (1)$$



Với: $BC=a$

$$OM=x-OA=x-\frac{2}{3}AA_1=x-\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$OA_1=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow HK=\frac{a\left(x-{}^{a\sqrt{3}}/_{3}\right)}{\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}}=2\left(x\sqrt{3}-a\right) \qquad (2)$$

$$\frac{NM}{SO}=\frac{A_1M}{OA_1}\Rightarrow NM=\frac{SO.A_1M}{OA_1}=\frac{2a\left({}^{a\sqrt{3}}/_{2}-x\right)}{{}^{1}/_{3}\,{}^{a\sqrt{3}}/_{2}}=2\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$$

(3)

$$S_{IJHK}=\frac{1}{2}.2\left(3a-2x\sqrt{3}\right).\left[\left(x\sqrt{3}-a\right)^2+\frac{2x\sqrt{3}}{3}\right]$$

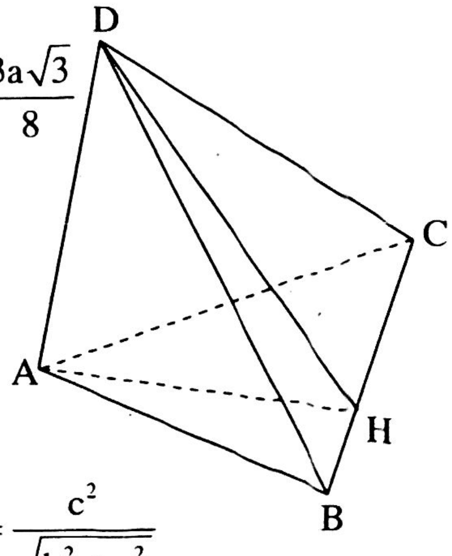
$$=\left(3a-2x\sqrt{3}\right)\left(\frac{4}{3}2x\sqrt{3}-2a\right)=\frac{1}{3}\left(3a-2x\sqrt{3}\right)\left(8x\sqrt{3}-6a\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(3a-2x\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt{3}-3a\right)=\frac{2}{3}\left(12ax\sqrt{3}-9a^2-4.2.x^2.3+6ax\sqrt{3}\right)$$

Xét hàm số: $f(x)=\frac{2}{3}\left(-24x^2+18a\sqrt{3}x-9a^2\right)$

Diện tích đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x=\frac{18a\sqrt{3}}{48}=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$

$$\max f=f\left(\frac{3a\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{3a^2}{4}.$$



Bài 326.

Kẻ $AH\perp BC$

$$AH=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}};\ BC=\sqrt{b^2+c^2}.$$

$$BH^2=c^2-\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\Rightarrow BH^2=\frac{c^4}{b^2+c^2}\Rightarrow BH=\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$DH^2 = DB^2 - BH^2$

$$= a^2 + c^2 - \frac{c^4}{b^2 + c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow DH = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{b^2 + c^2}}$$

$$S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2}DH.BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \Rightarrow 2S_{\Delta DBC} = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$$

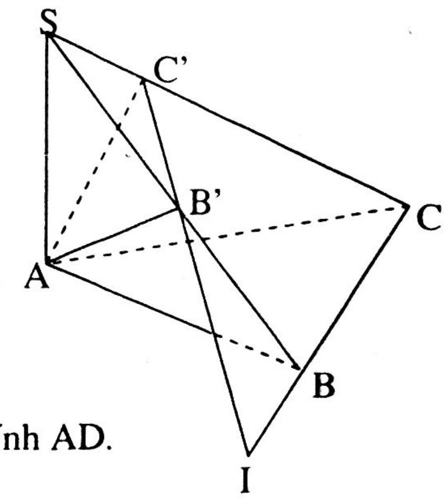
$HS^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$

$8S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2)$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$8S^2 \geq 2a^2bc + 2b^2ac + 2c^2ab \Leftrightarrow 8S^2 \geq 2abc(a + b + c)$

$\Leftrightarrow 4S^2 \geq abc(a + b + c) \Leftrightarrow 2S \geq \sqrt{abc(a + b + c)}$ (bất đẳng thức được chứng minh).



Bài 327.

a) Chứng minh (BB'C'C) nội tiếp.

Xét hai tam giác vuông:

$\Delta SAC \Rightarrow \widehat{A} = 1v \Rightarrow SA^2 = SC.SC'$ (1)

$\Delta SAB \Rightarrow \widehat{A} = 1v \Rightarrow SA^2 = SB.SB'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BB'C'C nội tiếp và B'C' không song song với BC.

b) Chứng minh $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$

Gọi đường tròn ngoại tiếp ΔABC có đường kính AD.

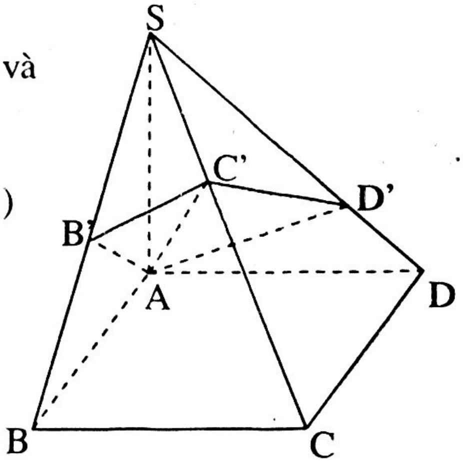
$AB' \perp (SBD) \Rightarrow AB' \perp SD$

Tương tự:

$AC' \perp SD \Rightarrow SD \perp (AB'C') \Leftrightarrow SD \perp AI$ và

$SA \perp AI \Rightarrow AI \perp (SAD) \Rightarrow AI \perp AD$

Hay AI là tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{ICA}$ (đpcm)



Bài 328.

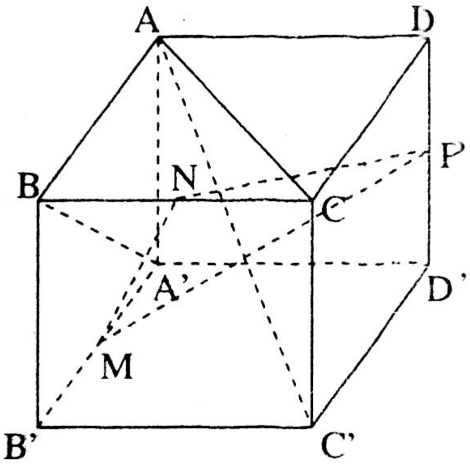
Xét:

$$\left.\begin{array}{l} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp (SBC)$$

$\Rightarrow AB' \perp B'C \Rightarrow \widehat{AB'C} = 90^0$

Tương tự: $\widehat{AD'C} = 90^0$ (đpcm)

Bài 329.



a) Xác định góc giữa AC' và A'B.

$B'C' \perp (ABB'A') \Rightarrow B'C' \perp A'B$ (1)

$AB' \perp A'B$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'B \perp (AB'C')$

$\Rightarrow A'B \perp AC'$.

b) Chứng minh $AC' \perp (MNP)$.

Gọi mỗi cạnh hình hộp là a

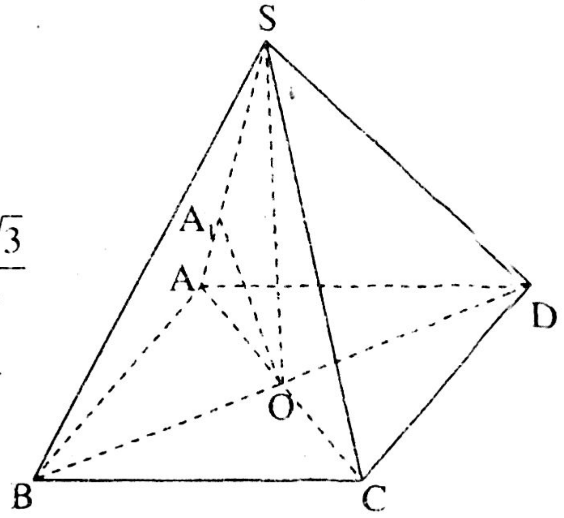
$$MN^2 = B'M^2 + BB'^2 + BN^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$$

Tương tự: NP = MP = NM $\Rightarrow$ ΔMNP tam giác đều.

Bên cạnh đó: AN = AP = AM; C'M = C'N = C'P

Vậy C' và A cách đều ba đỉnh M, N, P $\Rightarrow$ $AC' \perp (MNP)$. AC' đi qua **trọng tâm** Δ NMP.

Bài 330.



a) $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow BO^2 = a^2 - \frac{a^2 6}{9} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SO^2 = SB^2 - BO^2 \Rightarrow SO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$

$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy SO = AO = OC $\Rightarrow$ ΔASC vuông ở S.

b) Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$.

Kẻ $OA \perp SA$.

Xét (A_1BD) có:

$BD \perp (SAC) \Leftrightarrow BD \perp SA$; $OA \perp SA \Rightarrow SA \perp (BA_1D)$

$\Rightarrow$ **góc phẳng** của 2 mặt phẳng (SAB) và (SAD)

ta có: SB = SO; SA = SC $\Rightarrow$ $OA_1 = \frac{OS.OA}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ mà $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \Delta BA_1D$ vuông $\Rightarrow$ 2 mặt phẳng vuông góc với nhau.

PHẦN 5. KHOẢNG CÁCH

A. Kiến thức cơ bản

I. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

1. Định nghĩa:

Khoảng cách từ O đến đường thẳng a là độ dài đoạn $OH \perp a$ với $H \in a$. Kí hiệu $d(O, a) = OH$. Chú ý: $\forall M \in a$ thì $OH < OM$.

2. Tính chất:

Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a nhỏ nhất so với các khoảng cách từ O đến mọi điểm thuộc a.

Khoảng cách từ O đến đường thẳng a bằng 0 khi và chỉ khi $O \in a$.

II. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

1. Định nghĩa:

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (α) Khi đó độ dài đoạn thẳng OH gọi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α). Kí hiệu $d(O,\alpha) = OH$.

2. Tính chất:

$d(O,\alpha)$ là khoảng cách nhỏ nhất từ O đến mọi điểm thuộc mặt phẳng (α)

III. Khoảng cách giữa đường thẳng a song song với mặt phẳng α: Là khoảng cách từ $A \in a$ đến mặt phẳng (α). Kí hiệu $d(A,\alpha) = d(a, \alpha)$.

IV. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng α và β song song với nhau: Là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc α đến mặt phẳng β. Kí hiệu $d(\alpha, \beta) = d(A,\beta)$ với $A \in \alpha$.

V. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: là độ dài đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng đó.

Chú ý: Cách tính khoảng cách có thể áp dụng định nghĩa và xác định các điểm, tính khoảng cách giữa hai điểm sử dụng công thức trong tam giác.

Cần xác định các yếu tố trong mặt phẳng.

B. Các dạng bài toán tự giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng d cho trước.

Phương pháp giải:

Xác định $H \in d$ để $MH \perp d$. Tính MH theo hình học phẳng (đưa về trong mặt phẳng) sử dụng các công thức tính.

Bài 331. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh a. Chứng minh các khoảng cách từ các điểm BCDA'B'D' đến đường chéo AC' bằng nhau, tính khoảng cách đó.

Giải.

Xét mặt phẳng ADB'C'; ADC'B' là hình chữ nhật có:

$AD = B'C' = a$; $AB' = DC' = a\sqrt{2}$; $DB' = AC' = a\sqrt{3}$

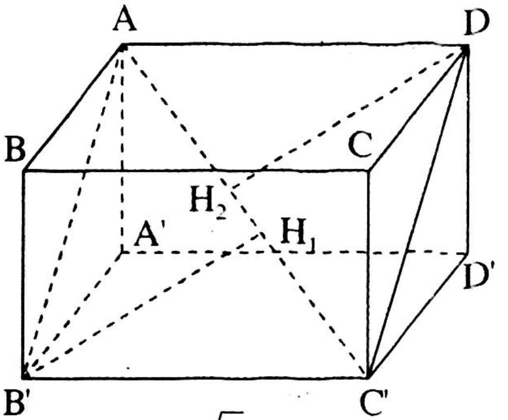
Vậy khoảng cách từ D và B' đến AC' bằng nhau.

Gọi khoảng cách đó $B'H_1 = DH_2$.

Tính DH_2

$$B'H_1 = DH_2 = \frac{AB'.B'C'}{AC'}$$

$$B'H_1 = \frac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Tương tự khoảng cách B, D' đến AC' bằng $B'H_1 = DH_2$.

Vậy khoảng cách từ B, B', D', C, D đến AC' bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 332. Cho hình chóp SABCD có đáy ABC có tâm là O, cạnh a, cạnh $SA \perp (ABCD)$; SA = a. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB.

a) Chứng minh $IO \perp (ABCD)$

b) Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM

Giải

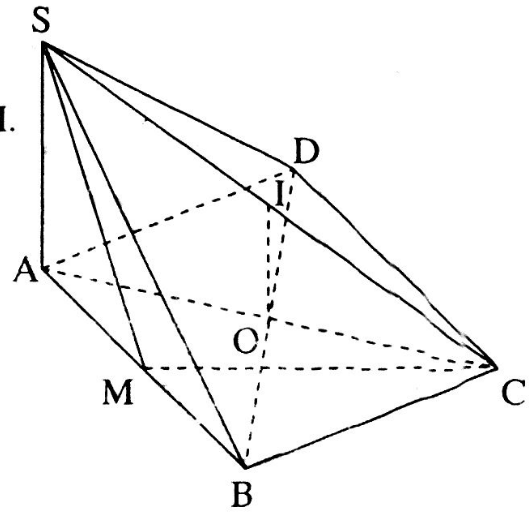
a) I trung điểm SC $\Rightarrow$ SA//Io

mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$

b) Tính khoảng cách từ I đến đường CM.

Cách 1.

Xét ΔSMC cân.



$$SM = CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$SC = a\sqrt{3}$

Tính diện tích SMC.

$$C = a(\sqrt{3} + \sqrt{5});\ p = \frac{a(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$$

$$p - \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ p - a\sqrt{3} = \frac{a(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{a(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{2.3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$$

Đường cao: $SH_1 = 2IH \Rightarrow IH = \dfrac{d+8MC}{MC} = \dfrac{a^2\sqrt{6}/4}{a\sqrt{5}/2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Cách 2.

Trong ΔACM kẻ $OH \perp CM \Rightarrow IH$ là khoảng cách từ I đến CM.

Tính $OH = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$; $IO = \dfrac{a}{2}$

$$IH^2 = OH^2 + IO^2 = \frac{a^2}{20} + \frac{a^2}{4} = \frac{6a^2}{20} = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (α)

Phương pháp giải:

Tìm chân đường thẳng đi qua M vuông góc với α là H ⇒ Tính MH

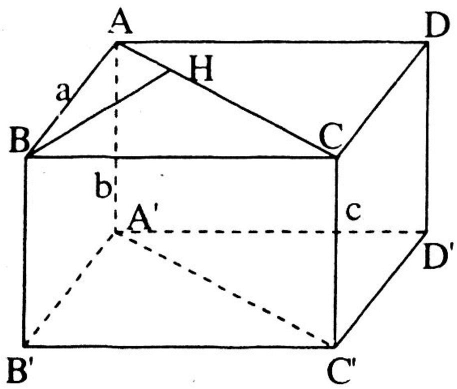
Phép chiếu vuông góc.

Thường sử dụng định lí 3 đường vuông góc.

Bài 333. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng ACC'A'.

b) Tính khoảng cách giữa BB' và AC'.



Giải

a) Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (ACC'A')$

vì $(BH \perp AC; BH \perp AA')$

Xét ΔABC. Tính đường cao BH: $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Tính khoảng cách từ BB' và AC'.

Chú ý: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau thì thông thường tính khoảng cách giữa mặt phẳng chứa một đường song song với đường kia.

Thật vậy BB'//(ACC'A') ⇒ khoảng cách giữa đường BB' và AC' là khoảng cách giữa BB' với mặt phẳng (ACC'A'). Khoảng cách $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Bài 334. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh AB = a nằm trong mặt phẳng α, cạnh $AC = a\sqrt{2}$ tạo với (α) góc 60^0

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (α).

b) Chứng minh cạnh BC tạo với (α) một góc $\varphi = 45^0$..

Giải

a) Dựng $CH \perp (\alpha)$. AC hợp với (α) góc 60^0

$$\Rightarrow \widehat{CAH} = 60^0 \Rightarrow CH = CA.\sin 60^0 = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

b) Góc giữa BC với (α) là góc $\widehat{CBH}$.

$$AH = a\sqrt{2}\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

$$\sin\widehat{HBC} = \frac{CH}{BC} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{HBC} = 45^0 \text{ (đpcm).}$$

Dạng 3: Tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp giải:

- *Dựng một mặt phẳng (α) chứa a và α// b, lấy* $M \in b$, *dựng* $MM' \perp \alpha$. *Khoảng cách MM' là khoảng cách giữa hai đường a và b.*
- *Dựng một mặt phẳng α vuông góc với b và đi qua* $M \in b$, *mặt phẳng α cắt a tại I.*
- *Dựng hình chiếu a' của a trên mặt phẳng α thì kẻ* $MM' \perp a'$.
- *Kẻ M'A//b ⇒ A kẻ AB vuông góc b ⇒ AB là đoạn vuông góc chung.*

Bài 335. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'.

a) Chứng minh B'D vuông góc với hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

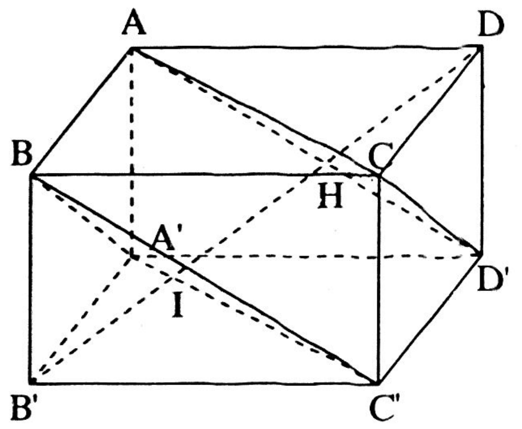
b) Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Giải.

a) Thật vậy: (BA'C')//(ACD') vì có AC//A'C', BA'//CD'.

Ta cần chứng minh $B'D \perp (BA'C')$.



Thật vậy.

Xét mặt (BDD'B') thì

$A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp B'D$ (1)

Xét mặt (ADB'C') thì

$BA' \perp (ADB'C') \Rightarrow BA' \perp B'D$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$B'D \perp (BA'C')$ (đpcm).

Tính khoảng cách (BC'A') và (ACD')

Xét tứ diện (B'BA'C') có đáy ΔBA'C' là tam giác đều cạnh bên: B'A'=B'B=B'C' = a.

Cạnh đáy $BC' = A'C' = BA' = a\sqrt{2}$

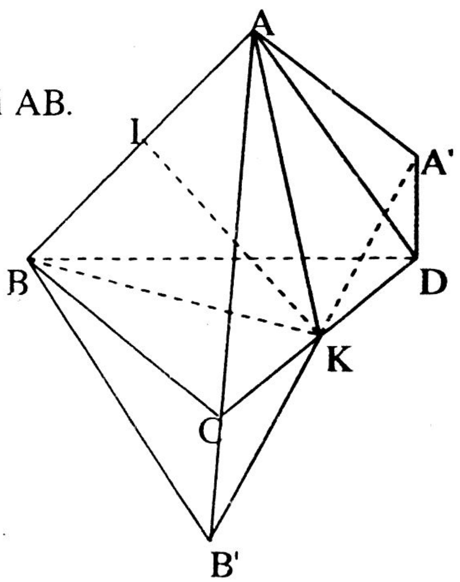
$$\Rightarrow B'I = \sqrt{B'C'^2 - C'I^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $IH = a\sqrt{3} - \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

b) Khoảng cách giữa BC' và CD' là khoảng cách giữa hai mặt **(BA'C') và** (ACD').

Vậy khoảng cách đó là: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 336. Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung **điểm hai cạnh** AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của **AB và CD thì** AC = BD và AD = BC.



Giải.

Dựng mặt phẳng P chứa CD và song song với AB.
(Cách dựng tại K trong mặt phẳng (ABK)).
Kẻ A'B' //AB.
Mặt phẳng (A'B'CD) là mặt phẳng P.
A'ABB' là hình bình hành nên:

$$\left.\begin{matrix} KC = KD \\ KA' = KB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow DA' = CB' \qquad (1)$$

$$IK \perp (P) \Rightarrow AA' \perp (P); BB' \perp (P)$$

AA'=BB' (2)

Xét hai tam giác vuông BB'C và AA'D.
Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta BB'C = \Delta AA'D$
$\Rightarrow$ AD = BC (đpcm)

Tương tự ta dựng mặt phẳng Q chứa AB và song song với CD $\Rightarrow$ **AC = BD** (đpcm).

Cách 2.

Sử dụng cách tính độ dài BC và AD.
Đặt BC = a; AD = a'; AB = b; BD = b'.
Cần chứng minh a' = a; b' = b.

Thật vậy: Xét $\Delta ACD \Rightarrow AK^2 = \frac{a'^2 + b^2}{2} - \frac{CD^2}{4}$

Xét $\Delta BCD \Rightarrow BK^2 = \frac{a^2 + b'^2}{2} - \frac{CD^2}{4}$

Vì IK đường vuông góc chung $\Rightarrow$ ΔBKA cân $\Rightarrow$ **BK = AK** $\Rightarrow$ $a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2$ (1)

Tương tự ta xét hai tam giác DAB và CBA $\Rightarrow$ CI = DI và $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: a= a'; b = b'

II. Bài tập tự giải.

Bài 337. (Đề 34 bộ đề thi TSĐH 2000).

Cho tam giác ABC đều cạnh a, trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S với AS = h. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 338. Cho tứ diện vuông SABC đỉnh S có $SA \perp SB$, $SA \perp SC$, $SB \perp SC$.

a) Đường cao SH. Chứng minh H là trực tâm ΔABC.

b) $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2}$.

c) Chứng minh định lí Pitago trong không gian:

$S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta SAB} + S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAC}$ (S là diện tích).

Bài 339. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O có cạnh a (AB = a); đường cao hình chóp SO, SO = a. Tính khoảng cách giữa hai đường SC và AB chéo nhau.

Bài 340. (Đề 130 bộ đề thi TSĐH 2000).

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C. CA = a, CB = b, cạnh SA = h vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm của AB.

a) Tính khoảng cách giữa đường AC và SD.

b) Tính khoảng cách giữa đường BC và SD.

Bài 341. Cho tứ diện đều cạnh a. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chứa cặp cạnh đối diện tương ứng.

Bài 342. Cho hình chóp tam giác đều SABC đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC) theo a.

Bài 343*. Cho hình hộp đứng ABCDA'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{A} = 60^0$, góc giữa đường chéo A'C và đáy bằng 60^0.

a) Tính đường cao của hình hộp đó.

b) Tìm đường vuông góc chung của A'C và BB'. Tính khoảng cách đó.

Bài 344*. Cho hình chóp SABC có ΔABC đều cạnh bằng a, mặt bên ΔSAB cân có SB = SA = b và vuông góc với mặt đáy (ABC). Người ta cắt hình chóp bằng một mặt phẳng song song với cạnh AB sao cho thiết diện đó là hình vuông. Hãy tính diện tích thiết diện.

Bài 345. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, BC = 2a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và có độ dài SA = a.

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là tam giác vuông.

b) Tính góc giữa các mặt bên và mặt đáy.

c) Tính góc giữa hai mặt bên liên tiếp.

Bài 346. Cho hình chóp SABCD có cạnh SA = a, tất cả các cạnh còn lại bằng b.

a) Chứng minh ΔSAC vuông.

b) Tính đường cao hình chóp đã cho.

Bài 347. Cho hình chóp ABCD thoả mãn điều kiện $AB \perp CD$, gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD), B' là hình chiếu của B lên mặt phẳng (ACD). Chứng minh rằng AA' và BB' cắt nhau. AA', BB' và IK đường vuông góc chung của AB và CD đồng quy.

Bài 348. Cho tứ diện ABCD biết AB = BC = AD = BD =a, AB = p, CD = q. Tính khoảng cách giữa AB và CD.

Bài 349. Cho tứ diện OABC các tam giác OAB, OBC, OCA đều là tam giác vuông đỉnh O, OA = a, OB = b, OC = c. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc của mặt (OBC), (OCA) (OAC) với mặt (ABC).

Chứng minh: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

III. Tổng kết chương 3

Bài tập trắc nghiệm.

Bài 1. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

b) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

c) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

d) Một mặt phẳng và một đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

Bài 2. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Đoạn thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy.

b) Qua một điểm có duy nhất một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước.

d) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng song song với một đường thẳng cho trước.

Bài 3. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau nếu $a \perp d$ thì $b \perp d$.

b) Một mặt phẳng α và một đường thẳng a cùng vuông góc với đường thẳng b thì $\alpha // a$.

c) Hai mặt phẳng α, β cùng vuông góc với mặt phẳng γ thì $\alpha // \beta$.

d) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Bài 4. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Qua một điểm có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

b) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

c) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

d) Cho hai đường thẳng a, b, nếu mặt phẳng α không chứa a và b thì a chéo b.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD, các đường thẳng Ax, By, Cz, Dt cùng vuông góc với (ABCD) và cùng nằm về một phía đối với mặt phẳng (ABCD). Mặt phẳng cắt Ax, By, Cz, Dt bởi các điểm A', B', C', D'. Các kết luận sau, kết luận nào đúng?

a) A'B'C'D' là hình chữ nhật.

b) A'B'C'D' là hình thang vuông.

c) A'B'C'D' là hình bình hành.

d) A'B'C'D' là hình vuông.

Bài tập tự luận

Bài 351. Cho tứ diện ABCD, Chứng minh rằng:

$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Bài 352. Trong một tứ diện ABCD, gọi các đường cao hạ từ đỉnh đến mặt đối diện là AA', BB', CC', DD'. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào tương đương.

a) $AB \perp CD$.

b) AA' và BB' cắt nhau ở H.

c) CC' và DD' cắt nhau ở K.

d) $AC \perp BD$.

Bài 353. Cho hình chóp tam giác đều OABC cạnh bên OA = a và góc tam diện đỉnh O là α, ba mặt đều vuông, Kéo dài đường cao OH trên đó lấy điểm S đối xứng của H đối với đỉnh O. Chứng minh tứ diện SABC đều.

Bài 354*. Đường cao hình chóp tam giác đều SABC bằng h. Các góc nhị diện thuộc cạnh bên bằng 2α. Tính diện tích đáy ΔABC.

Bài 355. Trong mặt phẳng P cho tam giác AOB cân OA = OB = 2a, góc $\widehat{AOB} = 120^0$, kẻ đường thẳng qua O vuông góc với mp (OAB). Lấy trên đường thẳng đó về 2 phía hai điểm C, D sao cho ΔABC vuông tại C và ΔABD đều.

a) Tính OC, OD.

b) Tính diện tích các mặt tứ diện ABCD.

Bài 356. Cho ΔABC cân ($AB = AC = a$), $\widehat{BAC} = 120^0$, một điểm S thay đổi trong không gian về một phía với mặt phẳng (ABC) sao cho AS = a, $\widehat{SAB} = 60^0$.

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt (ABC). Chứng minh H thuộc một đường thẳng cố định, S thuộc đường tròn cố định.

b) Chứng minh rằng khi độ dài SH đạt giá trị lớn nhất thì hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau, khi đó tính độ dài SC.

c) Khi SBC là tam giác vuông tại S, hãy tính góc giữa hai đường thẳng SA và AC. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 357. Cho hình chóp SABC có hai mặt bên SAB và SAC vuông góc với đáy. Đáy ABC là tam giác cân đỉnh A, trung tuyến AD = a, SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) một góc β. Tính đường cao SA, diện tích ΔABC.

Bài 358. Cho tứ diện SABC với góc tam diện đỉnh S là vuông.

a) Giả sử H là trực tâm ΔABC. Chứng minh $SH \perp (ABC)$, điều ngược lại có đúng không?

b) Giả sử ΔABC là tam giác đều cạnh a. Tính SH theo a, kéo dài SH được một đoạn SD = HS. Chứng tỏ ABCD là tứ diện đều.

Bài 359. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCDA'B'C'D' cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Xét đường thẳng Δ đi qua A và song song BD. Gọi P là mặt phẳng qua Δ và C'.

a) Thiết diện hình lăng trụ và mặt phẳng P là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

b) Tính góc giữa mặt phẳng P và (ABCD).

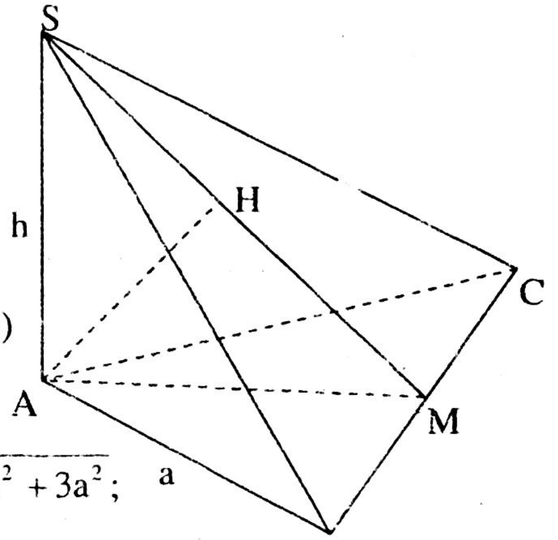
Bài 360. Trên mặt phẳng (Q) cho đường tròn đường kính AB. C thuộc đường tròn. Đường thẳng Ax vuông góc với (Q), trên Ax lấy D.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện ABCD đều là tam giác vuông.

b) Gọi M, N, P là trung điểm các đoạn AC, CD, DB. Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật và $(MNPQ) \perp (Q)$.

III. Hướng dẫn giải.

Bài 337.



ΔABC đều cạnh a.

$SA \perp (ABC)$; $SM \perp BC \Rightarrow SC = SB$

Dựng $AH \perp SM$ (1)

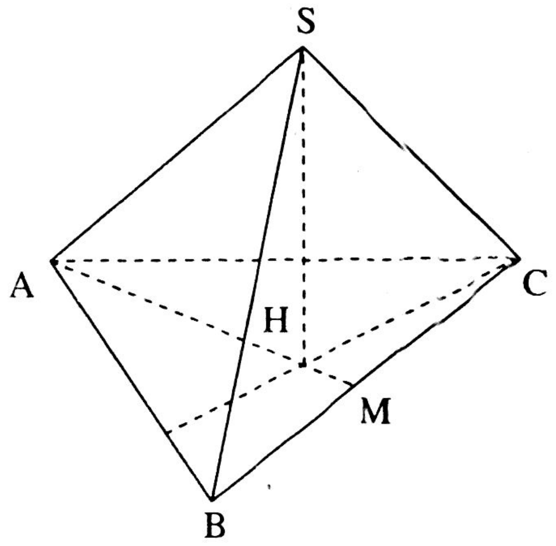
Ta thấy $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SM = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$;

$$AH = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}h}{\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}.$$

Bài 338.



a) $SH \perp (ABC)$, nối $AH \times BC = M$

$SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$ (1)

$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow BC \perp AH$ (3)

Tương tự: $AB \perp CH$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ H là trực tâm ΔABC.

b) Xét trong ΔASM vuông ở S

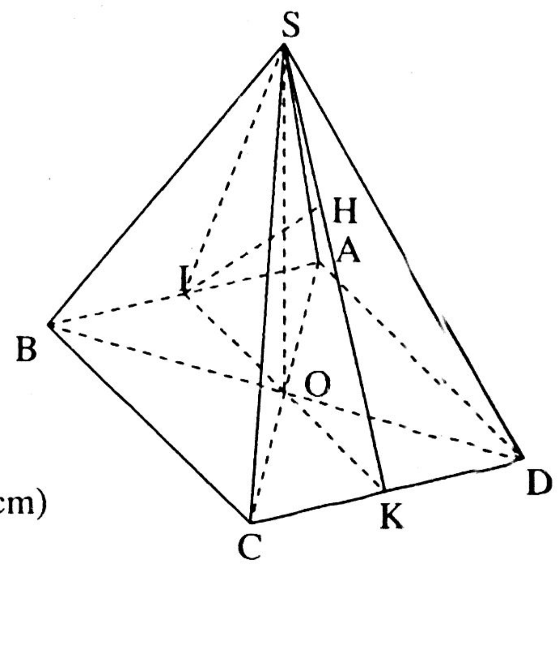
$$\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SM^2} \quad (5)$$

Xét trong ΔBSC vuông ở S

$$\Rightarrow \frac{1}{SM^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$$

Thay (6) vào (5) ta có: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$.

c) Xét ΔASM vuông ở S.



$SM^2 = AM.MH$

$$\frac{SM^2.BC^2}{4} = \frac{MH.BC}{2}.\frac{AM.BC}{2}$$

$S^2_{\Delta SBC} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC}$ (1)

Tương tự:

$S^2_{\Delta SAB} = S_{\Delta HAB}.S_{\Delta ABC}$ (2)

$S^2_{\Delta SAC} = S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$ (3)

$S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAB} + S^2_{\Delta SAC}$

$= (S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HAC})S_{\Delta ABC}$ (đpcm)

$= S^2_{\Delta ABC}$

Bài 339.

Tính khoảng cách giữa SC và AB.

Xét mặt phẳng (SCD) và AB, ta thấy AB//SC. Khoảng cách giữa SC và AB là khoảng cách từ $I \in AB$ đến mặt phẳng (SCD).

Từ I kẻ IH $\perp$ SK (K là trung điểm CD).

$I \in (SIK) \Rightarrow IH \perp (SCD)$ vì $CD \perp (SIK)$.

Xét ΔSIK có $IK = a$; $SI = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = SK$.

Ta có $IH.SK = SO.IK \Leftrightarrow IH = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}/2} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Bài 340.

a) Tính khoảng cách giữa AC và SD.

DM//AC $\Rightarrow$ khoảng cách giữa AC và SD là khoảng cách giữa AC **và (SDM).**

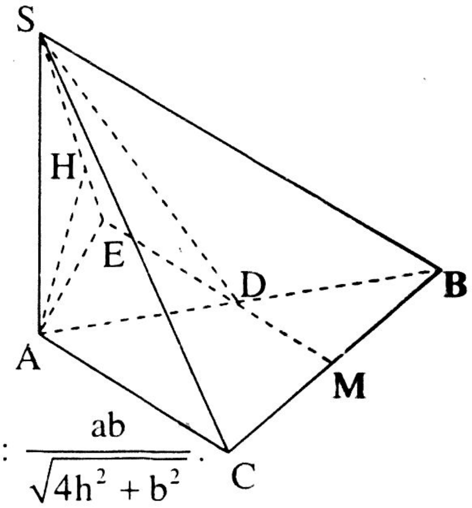
Kẻ AE $\perp$ DM Nối SE.

Kẻ AH $\perp$ SE thì $AH \perp (SDM)$.

Tính AH.

Xét ΔSAE có $AE = CM = b/2$; $SA = h$

$$AH = \frac{h.\frac{b}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}} = \frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}.$$



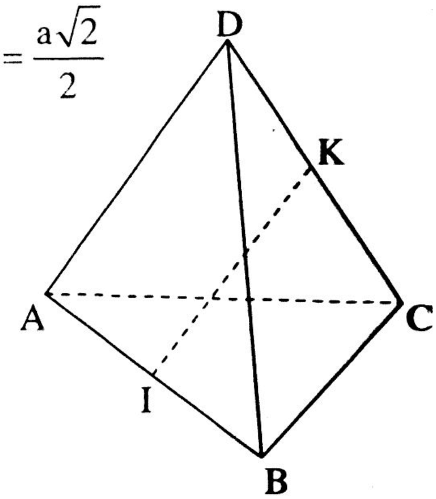
b) Tương tự khoảng cách giữa BC và SD là: $\dfrac{ab}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$.

Bài 341.

Gợi ý: Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta thấy: IK $\perp$ CD; IK $\perp$ AB $\Rightarrow$ IK là đường thẳng vuông góc **chung AB** và CD. Nên xét Δ IKC vuông ở K thì:

$$IK^2 = IC^2 - KC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

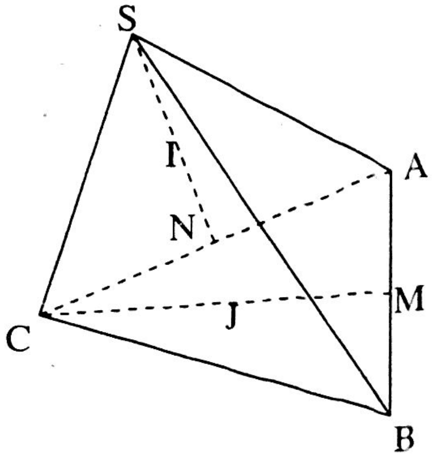


Bài 342.

Tính đường cao SO, O là tâm của ΔABC.

$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SO^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \Rightarrow SO = a.$



Bài 343.

Xét ΔCAB có $\hat{C} = 1v$, $SC \perp (ABC)$,

$SC = 2, AC = BC = 4,\ AB = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow CM = 2\sqrt{2},\ SN = 2\sqrt{2},\ MN = 2.$

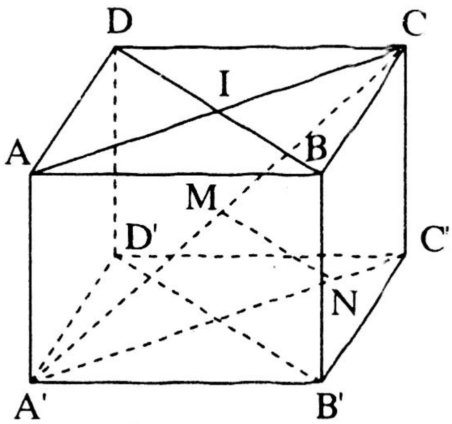
Vậy ta xét hình chóp SCMN có:

$SC = MN = 2,\ CM = 2\sqrt{2},\ \widehat{CNM} = 1v,\ SC \perp (CMN).$

Vậy tứ diện SCMN các cặp cạnh đối bằng nhau, như vậy đường nối trung **điểm các cạnh** đối diện là đường vuông góc chung (dựa vào bài 341). Gọi I, J **là trung điểm** của SN và CM

Vậy $IJ^2 = SJ^2 - SI^2 = SC^2 + CJ^2 - SI^2 = 4 + 2 - 2 = 4 \Rightarrow IJ = 2.$

Bài 344.



a) **Dễ thấy** $\widehat{A'CA} = 60^0$.

ABCD là hình thoi: $\hat{A} = 60^0$; $AB = BC = a$

$\Rightarrow DB = a; AC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AA' = h = a\sqrt{3}tg60^0 = 3a.$

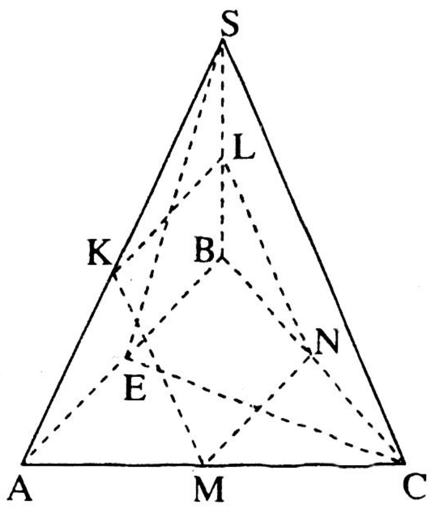
b) **BB'//(ACC'A')**

$\Rightarrow$ **khoảng** cách giữa A'C và BB' là **khoảng cách** từ B đến (ACC'B') bằng $BI = \frac{a}{2}$.

Gọi M là trung điểm A'C, từ M trong (BDD'B') kẻ MN//B'D', $N \in B'D'$

$\Rightarrow$ **MN là đường** vuông góc chung.

Bài 345.



Gọi E là trung điểm của AB và $AB \perp (SCE)$

$\Rightarrow$ **$AB \perp SC$** và KL//AB.

Muốn thiết diện là hình vuông thì KM//SC.

KM = KL = MN

MC = MN $\Rightarrow$ **AM = a - MN**

Theo định lí Talét: $\frac{AM}{AC} = \frac{AK}{AC} = \frac{MK}{SC} = \frac{MC}{SC}$

(Vì MK = MN = MC)

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{MC}{SC} = \frac{AC - MC}{AC} \Leftrightarrow MC = \frac{AC.SC}{AC + SC}.$$

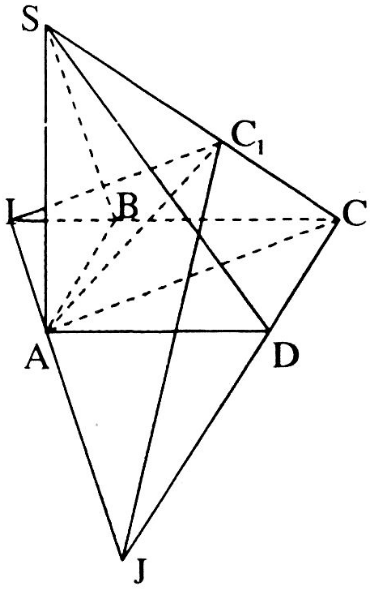
Tính SC.

$$SC^2 = SE^2 + CE^2 = SA^2 - AE^2 + CE^2$$

$$\Leftrightarrow SC^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow SC = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$$

$$\Rightarrow MC = \frac{a\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}}{a + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}} \Rightarrow S_{MNLK} = \frac{a^2\left(b^2 + \frac{a^2}{2}\right)}{\left(a + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}\right)^2}$$

Bài 346.



a) Dựa vào định lí 3 đường vuông góc.

b) $(SAB) \perp (ABCD)$; $(SAD) \perp (ABCD)$.

Xét (SDC) và (ABCD) thì DC là giao tuyến và

$$\left.\begin{matrix} AD \perp DC \\ SD \perp DC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{SDA}$$ là góc giữa 2 mặt phẳng (SDC) và (ABCD).

Tương tự: (SBC) và đáy (ABCD) là góc $\widehat{SBA}$.

c) Tính góc 2 mặt bên liên tiếp.

Mặt (SAD) và (SDC) thì $DC \perp (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SDC)$.

Mặt (SDC) và (SBC) có giao tuyến SC.

Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ $AIJ \perp AC$ cắt BC, CD tại I và J.

Trong mặt SAC kẻ $AC_1 \perp SC$.

Ta thấy: $SC \perp (IC_1J) \Rightarrow$ góc phẳng $\widehat{IC_1J}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC).

Tính :

$$AJ = AC tg\widehat{ACD} = 2a\sqrt{5}; AI = AC tg\widehat{ACB} = \frac{1}{2}a\sqrt{5};$$

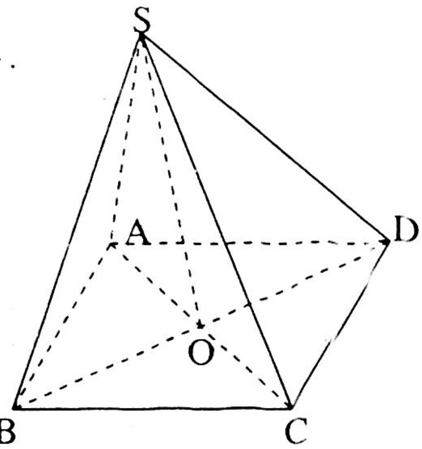
$$IJ = \frac{5}{2}a\sqrt{5}; AC_1 = \frac{a.a\sqrt{5}}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

Gọi góc:

$$\widehat{AC_1J} = \varphi \Rightarrow \tan\varphi = \frac{AJ}{AC_1} = \frac{2a\sqrt{5}}{\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = 2\sqrt{6};\ \widehat{AC_1I} = \beta \Rightarrow \tan\beta = \frac{AI}{AC_1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\tan\widehat{JC_1I} = \tan(\varphi + \beta) = \frac{\tan\varphi + \tan\beta}{1 - \tan\varphi.\tan\beta} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy góc $\widehat{JC_1I} = 180^0 - (\alpha + \beta)$.



Bài 347.

a) Xét O là giao của $AC \times BD = O$.
Xét hai tam giác SBD và BCD
$\Rightarrow \Delta SBD = \Delta BCD$ (c. c. c)
$\Rightarrow SO = OC = OA \Rightarrow \Delta$ SAC vuông ở S.
Kẻ $SH \perp AC$ ta có:
$(SAC) \perp (ABCD)$ vì $BD \perp SO$ và $BD \perp AC$.

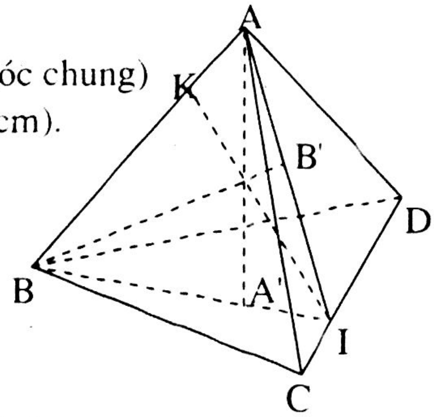
Vậy $SH = d(S, ABCD) = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{a.b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Bài 348.

Cách 1: $AB \perp CD$, $AA' \perp (DBC) \Rightarrow AA' \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABA')$.

Kẻ $BB' \perp AI \in (ACD)$ ta thấy $BB' \perp (ACD)$.

Xét đường cao $IK \perp AB$ (IK là đường vuông góc chung)
Xét trong $\Delta ABI \Rightarrow$ AA', BB', IK đồng quy (đpcm).
Cách 2: Gọi IK là đường vuông góc chung giữa AB và CD. Xét ΔABI thì AA', BB' thuộc ΔABI.



Bài 349.

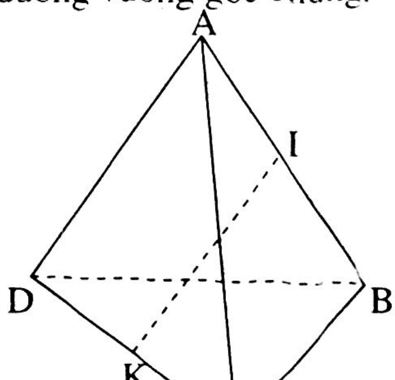
Gọi I, K là trung điểm của AB và CD $\Rightarrow$ IK là đường vuông góc chung.

$$IK^2 = BK^2 - BI^2;\ BK^2 = a^2 - \frac{q^2}{4};\ BI^2 = \frac{p^2}{4}$$

$$IK^2 = a^2 - \frac{p^2 + q^2}{4} = \frac{4a^2 - (p^2 + q^2)}{4}$$

$$IK = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (p^2 + q^2)}.$$

(điều kiện $4a^2 - (p^2 + q^2) > 0$)

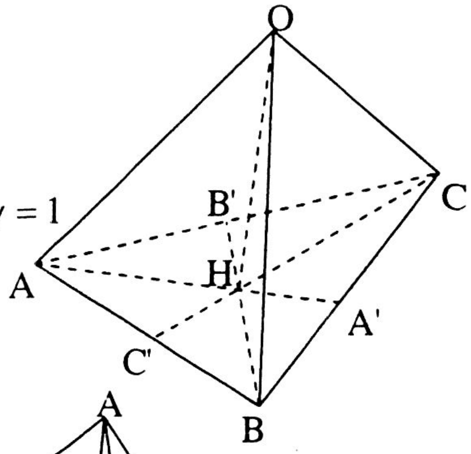


Bài 350. Theo bài 338 ta có:

Gọi H là trực tâm của ΔABC thì chân đường cao hạ từ O đến mặt (ABC) là H.

Khi đó góc: $\alpha = \widehat{HA'O}$; $\beta = \widehat{HB'O}$; $\gamma = \widehat{HC'O}$

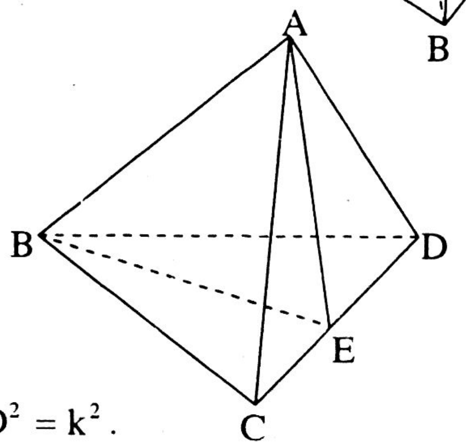
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = OH^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$



Theo bài 338 thì:

$$\frac{1}{OH} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Bài 351.



Kẻ $AE \perp CD \Rightarrow BE \perp CD$

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ (1)

$BD^2 = BE^2 + ED^2$ (2)

$BC^2 = CE^2 + BE^2$ (3)

$AD^2 = AE^2 + ED^2$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4)

$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$

Ngược lại:

Nếu trong tứ diện có điều kiện:

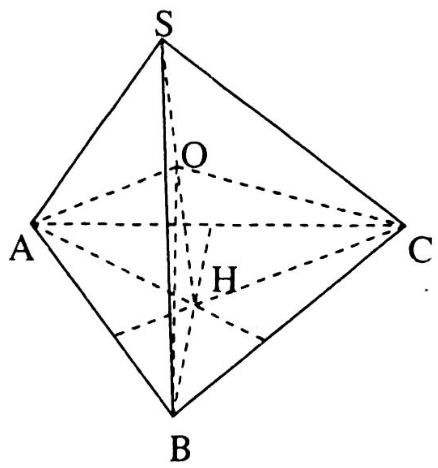
$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$

ta biến đổi $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = k^2$.

Khi đó, xét mặt phẳng (ACD) thì $H \in CD$ cách trung điểm I khoảng $IH = \dfrac{k^2}{2CD}$, $AH \perp CD$ tại H và xét trong mặt phẳng (BCD) thì $IH = \dfrac{k^2}{2CD}$, $BH \perp CD$ tại $H \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

Bài 352. Chứng minh tương tự bài 348.

Bài 353.



Ta thấy H là trực tâm ΔHBC và trọng tâm ΔABC nên ta có:

$$AB = a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

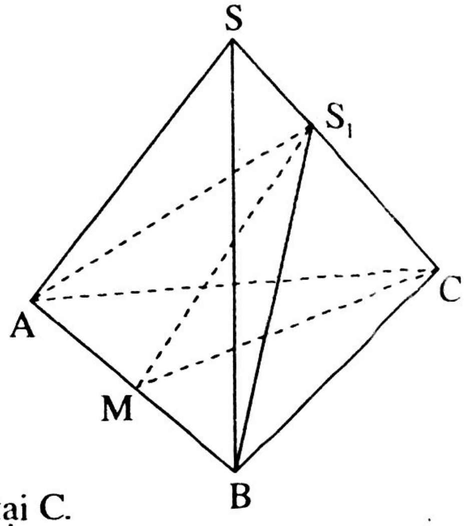
$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = 4OH^2 + AH^2$$

$$= 4(OA^2 - AH^2) - 3AH^2$$

$$= 4a^2 - 3\frac{a^2 6}{9} = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Vậy tứ diện SABCD đều.

Bài 354.



SABC đều có $SH \perp (ABC)$, H là trọng tâm, $SC \perp AB$.
Qua AB dựng mặt phẳng vuông góc với SC tại S_1 thì $\widehat{AS_1B} = 2\alpha$.
Vì ΔABC đều nên M là trung điểm AB.
Đặt $AB = x$, $\widehat{MS_1B} = \alpha$

$$S_1B = \frac{x}{2\sin\alpha},\ S_1M = \frac{x}{2}\cot\alpha,\ HC = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

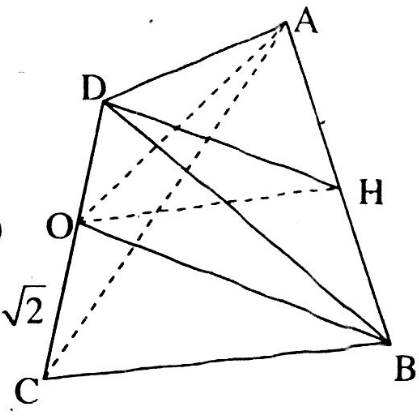
Xét 2 tam giác SHC và MS_1C vuông góc tại C.
$\Rightarrow \Delta SHC$ đồng dạng ΔMS_1C

$$\Rightarrow \frac{MS_1}{SH} = \frac{CM}{SC} \Leftrightarrow \frac{x/2\cot\alpha}{h} = \frac{x\sqrt{3}}{2SC} \Rightarrow SC = \frac{h\sqrt{3}}{\cot\alpha} = h\sqrt{3}\tan\alpha$$

$$CH^2 = SC^2 - SH^2 = 3h^2\tan\alpha - h^2 = 3h^2\left(\tan\alpha - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 = 9h^2\left(\tan\alpha - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{9h^2\sqrt{3}}{4}\left(\tan\alpha - \frac{1}{3}\right).$$

Bài 355.



a) $OA = OB = 2a$, $OH = a$,

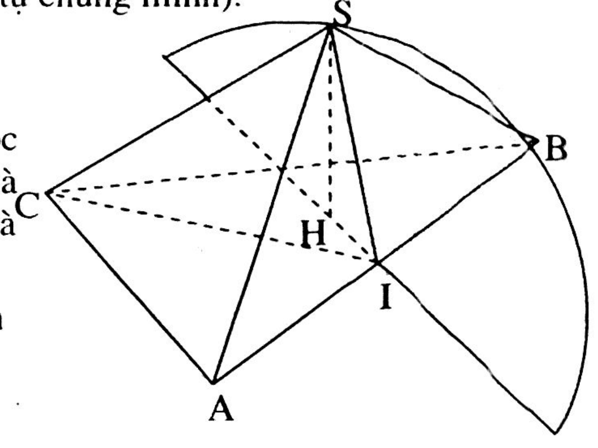
$AB = 2a\sqrt{3}$, $CH = \frac{1}{2}AB = a\sqrt{3}$ (ΔABC vuông)

$OC^2 = CH^2 - OH^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow OC = a\sqrt{2}$

$HD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Vậy $OD^2 = DH^2 - OH^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow OD = 2a\sqrt{2}$.
b) Tính diện tích các mặt (học sinh tự chứng minh).

Bài 356.



a) $AB = AC = SA = a$.

$\widehat{BAS} = 60^0 \Rightarrow \Delta SAB$ đều $\Rightarrow$ S thuộc mặt phẳng đi qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Gọi mặt phẳng đó là (α) thì H thuộc đường thẳng

$\Delta = (ABC) \times \alpha$. Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy S thuộc mặt phẳng α và cách I khoảng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên nó thuộc **đường tròn** $\left(I, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \leq SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$SH = SI$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv I \Leftrightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$SC^2 = CI^2 + SI^2 = CI^2 + \frac{3a^2}{4}$

Xét $\Delta ACD \Rightarrow$

$CI^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC.AI\cos 120^0 = a^2 + \frac{a^2}{4} + 2a\frac{a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{4}$

$SC^2 = \frac{10a^2}{4} \Rightarrow SC = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

c) Khi ΔBSC vuông ở S thì ta có tứ diện ASCB có AS = AC = **AB. Vậy** chân đường cao hạ từ A đến mặt đáy là tâm vòng tròn ngoại tiếp **ΔSBC $\Rightarrow$** hình chiếu của A xuống mp (SBC) là K với K là trung điểm của BC

Tính khoảng cách $AK = AB\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

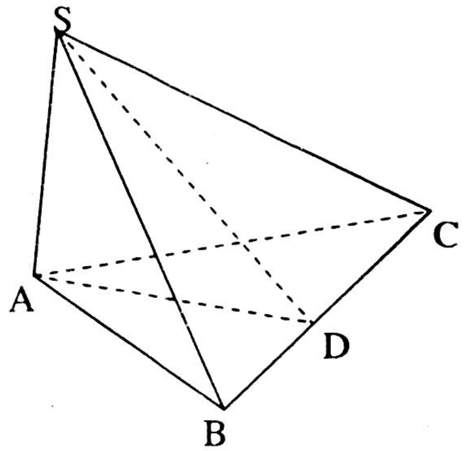
Tính góc AC và SA.

Ta có: $SC^2 = CB^2 - SB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$ (1)

$AC^2 + AS^2 = 2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC^2 = AS^2 + AC^2 \Rightarrow$ CAS vuông ở A $\Rightarrow$ góc giữa **AC và** SA bằng 90^0.

Bài 357.



Nhận xét:

$(SAB) \perp (ABC); (SAC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{SBA} = \alpha$.

Kẻ $AD \perp BC \Rightarrow SD \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD)$

$\Rightarrow$ góc $\widehat{BSD} = \beta$.

Tính SA: $SA = SB\sin\alpha$; $BD = SB\sin\beta$.

Tính SB: Xét $\Delta SAB \Rightarrow SB^2 = SA^2 + BA^2$

mà $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Leftrightarrow SB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$

hay $SB^2 = SB^2\sin^2\alpha + a^2 + SB^2\sin^2\beta$

$$\Leftrightarrow SB^2\left(1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta\right)=a^2 \Leftrightarrow SB^2=\frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow SB=\frac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}} \quad (\text{điều kiện } \cos^2\alpha>\sin^2\beta)$$

Vậy $SA=\dfrac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}\sin\alpha$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AD.BC=AD.BD=\frac{a^2\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}.$$

Bài 358.

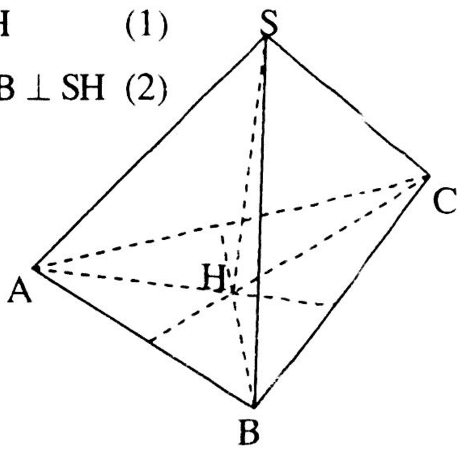
a) Xét (SAA') thì $BC\perp(SAA')\Rightarrow BC\perp SH$ (1)

Tương tự xét (SCC') thì $AB\perp(SCC')\Rightarrow AB\perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Ngược lại $SH\perp(ABC)$ vẫn đúng.

b) Chứng minh tương tự bài 354.



Bài 359.

a) Gọi: $I=\Delta\cap CD$; $J=\Delta\cap CB$; $B_1=C'J\cap BB'$; $D_1=C'I\cap DD'$.

Dễ thấy $AB_1C'D_1$ là hình bình hành và B_1D_1 là trung điểm của BB' và DD' và $AC'\perp B_1D_1$

$\Rightarrow$ thiết diện hình thoi.

Tính diện tích là: $AB_1C'D_1$.

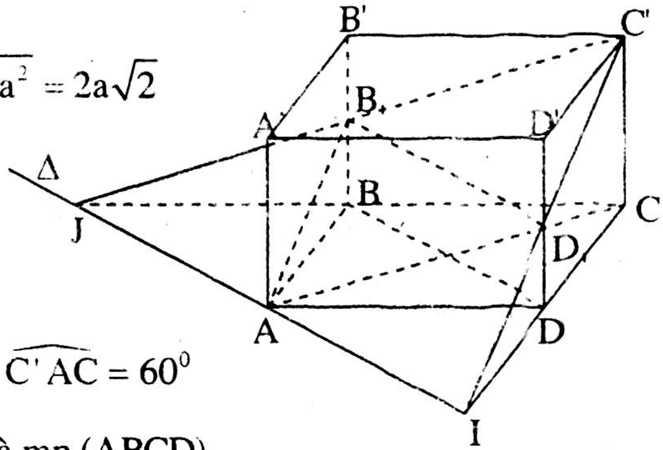
$BD=B_1D_1=a\sqrt{2}$

$AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\sqrt{2a^2+6a^2}=2a\sqrt{2}$

$S_{AB_1C'D_1}=\dfrac{1}{2}2a\sqrt{2}a\sqrt{2}=2a^2.$

b) Góc mặt phẳng P và (ABCD) là góc $\widehat{C'AC}$.

$$tg\widehat{C'AC}=\frac{CC'}{AC}=\frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{C'AC}=60^0$$



Chú ý: $AB_1C'D_1$ có hình chiếu là mp (ABCD)

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{AB_1C'D_1}\cos\varphi\Rightarrow S_{AB_1C'D_1}=\frac{S_{ABCD}}{\cos60^0}=2a^2.$$

Bài 360.

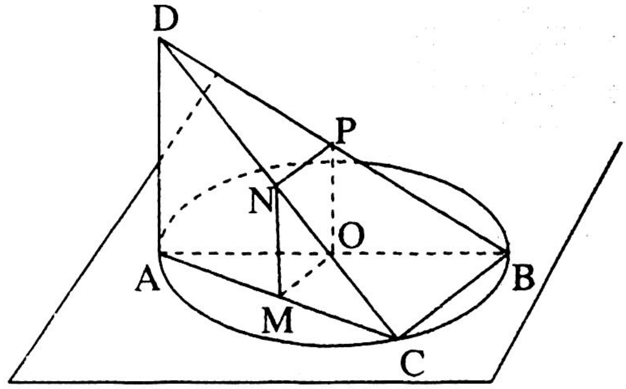
a) Tứ diện ADBC có $AD \perp (ABCD)$, ΔHBC vuông ở C. Theo định lí 3 đường vuông góc suy ra $BC \perp DC \Rightarrow$ các tam giác của tứ diện đều vuông.

b) $MN // AD$; $MN = \frac{1}{2}AD$ và $MN \perp (ABC)$

$OP // AD$; $OP = \frac{1}{2}AD$ và $OP \perp (ABC)$.

Vì NP //CD và OM//BC $\Rightarrow$ MNPQ là hình chữ nhật và mặt **phẳng** (MNPQ) chứa $MN \perp (ABC)$

$\Rightarrow (MNPQ) \perp (ABC)$ (đpcm).



ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình bình hành thành chính nó?

a) Không có b) Có một c) Có hai d) Có ba.

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho M(1, 2). Các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng trục Oy?

a) (1, –2) – b) (–1, 2) c) (–1, –2) d) (2, –1)

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho M(91, 2). Điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng trục y = x

a) (2, 1) b) (–1, 2) c) –2, 1) d) (–2, –1)

Bài 4. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

a) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

b) Có vô số phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

c) Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự là một phép vị tự.

d) Thực hiện hai phép vị tự cùng tâm I sẽ được một phép vị tự tâm I.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(x-2)^2+(y-4)^2=4$. Thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90^0 sẽ biến thành đường tròn nào trong các đường tròn sau?

a) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ b) $(x+2)^2+(y-4)^2=1$

c) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ d) $(x+2)^2+(y+1)^2=1$.

Bài 6. Cho đường $x+y+1=0$, qua phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 biến thành đường thẳng nào sau đây?

a) $x+y+2=0$ b) $x+y-1=0$

c) $x-y+2=0$ d) $x+y-2=0$.

Bài 7. Các mệnh đề sau, mệnh đều nào đúng?

a) Phép dời hình có hai điểm biến thành chính nó thì phép dời hình đó là phép đồng nhất.

b) Phép vị tự biến hai điểm phân biệt thành chính nó thì nó là phép đồng nhất.

c) Phép đối xứng trục có hai điểm phân biệt biến thành chính nó thì phép đối xứng là phép đồng nhất.

d) Phép đồng dạng biến hai điểm thành chính nó thì phép đồng dạng đó là phép đồng nhất.

Bài 8. Cho đường tròn $x^2+y^2-6x+8y+16=0$ qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(1,1)$ biến thành đường tròn nào sau đây.

a) $(x-4)^2+(y+3)^2=9$ b) $(x+4)^2+(y-3)^2=9$

c) $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ d) $(x+4)^2+(y+3)^2=9$.

Bài 9. Cho đường thẳng (d): $2x + y + 2 = 0$, qua phép vị tự $\vec{v} = (-1, 1)$ biến thành đường thẳng nào dưới đây?

a) $2x + y + 3 = 0$ b) $2x + y - 3 = 0$

c) $2x + y - 2 = 0$ d) $2x + y - 1 = 0$.

Bài 10. Cho đường tròn $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng (d): x =3. Các đường tròn sau, đường nào đối xứng với (C) qua trục đối xứng (d)?

a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ b) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 9$

c) $(x+5)^2 + (y+2)^2 = 9$ d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Bài 11. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh là a. Hãy chỉ ra các mệnh đề sai.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$ b) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Bài 12. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh a. Hãy tìm mệnh đề sai.

a) $|AC'| = |B'D| = |BD'| = a\sqrt{3}$ b) $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'} = a^2$

c) $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{B'C} = 0$ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AD}$.

Bài 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, $a \in \alpha$; $b \in \beta$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

b) Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng α, mặt phẳng β chứa a thì $\beta \perp \alpha$.

c) Cho hai đường thẳng $a \perp b$, mặt phẳng α vuông góc với a thì song song với b.

d) Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau luôn luôn có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

Bài 14. Cho tứ diện đều ABCD, khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC) là:
Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

a) Độ dài DG với G là trọng tâm ΔABC.

b) Độ dài DH với H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên mặt phẳng (ABC).

c) Độ dài đoạn DO với O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d) Độ dài DM với M là trung điểm BC.

Bài 15. Cho tứ diện ABCD cạnh bằng 3. Khoảng cách giữa hai cạnh đối diện là:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3\sqrt{4}}{3}$ d) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Bài 16. Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD) có kết quả là:

a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{2a}{3}$ d) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 17. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có ba kích thước AB = a, AD = b, AA' = c. Hãy xét kết quả sau, kết quả nào sai?

a) Độ dài $BD' = AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) Khoảng cách giữa hai đường AB và DD' là b.

c) Khoảng cách giữa hai đường BB' và DD' là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

d) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A') là: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Bài 18. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

a) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BD) bằng: $\frac{a}{3}$

b) Độ dài AC' bằng $a\sqrt{3}$.

c) Khoảng cách từ A đến mặt (CDD'C') bằng $a\sqrt{2}$.

d) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCC'B') bằng $\frac{3a}{2}$

Bài 19. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

a) Khoảng cách từ đường thẳng a song song với mặt phẳng α là khoảng cách từ điểm A thuộc đường a đến mặt phẳng α.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ M thuộc a đến mặt phẳng P chứa b và P//a.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng α//β là khoảng cách từ A thuộc α đến mặt phẳng β.

d) Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau a và b là khoảng cách từ M thuộc A đến N thuộc mặt phẳng α chứa b và song song với a.

Bài 20. Cho hình lăng trụ tam giác ABCA'B'C', đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Xét biểu thức sau đây, xem biểu thức nào đúng?

a) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

c) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Bài tập kiểm tra

ĐỀ 1

Bài 1. Cho tam giác ABC, trên phân giác ngoài d của góc $\widehat{C}$ lấy một điểm E khác C. Chứng minh rằng: EA + EB > CA + CB.

Bài 2. Cho ΔABC và đường thẳng d, lấy điểm $D \in d$. Gọi M là trọng tâm của tứ giác ABCD, gọi G là trọng tâm ΔABC.

a) Chứng minh G, M, D thẳng hàng.

b) Tìm quỹ tích M khi D di chuyển trên d.

Bài 3. Cho tứ diện SABC, một điểm M thuộc SB.

a) Dựng thiết diện qua M song song SA và song song BC.

b) Xác định vị trí M để thiết diện là hình thoi.

ĐỀ 2

Bài 1. Chứng minh tích hai phép đối xứng tâm O_1, O_2 là phép tịnh tiến.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD, dựng phía ngoài hình các hình vuông ABEF, ADGH. Chứng minh AC = HF.

Bài 3. Cho hình chóp tam giác đều SABC, biết trung tuyến AM của đáy ABC bằng 3a và độ dài cạnh bên $a\sqrt{7}$.

a) Tính độ dài cạnh đáy.

b) Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy, góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

c) Tính đường cao hình chóp hạ từ S đến mặt đáy.

ĐỀ 3

Bài 1. Về phía ngoài tam giác ABC, lấy AC, AB làm cạnh huyền dựng phía ngoài các tam giác vuông cân ΔACE, ΔABD, lấy trung điểm M của BC. Chứng minh DME là tam giác vuông cân.

Bài 2. Cho hình chóp SABC có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, gọi I là đường cao AI của ΔABC, H, K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC.

a) Chứng minh $(SAI) \perp (SBC)$.

b) Chứng minh $HK \perp SC$; $HK \perp (SBC)$.

c) Kéo dài HK cắt SA tại D. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện SBCD vuông góc với nhau.

Bài 3. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có OO' là trục của hình lập phương (O, O' tương ứng tâm của ABCD và A'B'C'D'), P là điểm trên OO' sao cho $\frac{O'P}{O'O} = \frac{1}{4}$. Dựng thiết diện qua P song song với AC và song song B'D'.

ĐỀ 4

Bài 1. Cho đường tròn (O), dây cung PQ. Dựng hình vuông ABCD có đỉnh AB thuộc PQ, còn hai đỉnh nằm trên đường tròn.

Bài 2. Cho tam giác ABC đều, đường thẳng d vuông góc với (ABC), tại A lấy M thuộc d, gọi H là trực tâm của ΔABC, gọi O trực tâm ΔMBC.

a) Chứng minh: $MC \perp (BOH); OH \perp (MBC)$.

b) Đường OH cắt d tại N, chứng minh rằng tứ diện BCMN có các cạnh đối diện vuông góc.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân $AB = AC = a\sqrt{5}$, $BC = 4a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho $AS = a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng P vuông góc với đường ca AH cắt hình chóp theo một thiết diện hình gì? Khoảng cách từ A đến mặt phẳng P là x. Tính diện tích thiết diện.

ĐỀ 5

Bài 1. Cho tứ diện SABC có 3 cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và SA = a; SB = b; SC = c. Gọi SH vuông góc với mặt (ABC) tại H.

a) Chứng minh $SA \perp BC; SB \perp CA; SC \perp AB$.

b) H là trực tâm ΔABC.

c) $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Bài 2. Cho hình chóp SABCD có ABCD à hình thoi tâm I cạnh là a, đường chéo BD bằng a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy. $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh: $(SCD) \perp (SCB)$.

Bài 3. Cho đường thẳng d, trên d lấy A, B, C với B ở giữa AC, lấy d làm bờ dựng các tam giác đều có cạnh AB, BC là ABE và BCF.

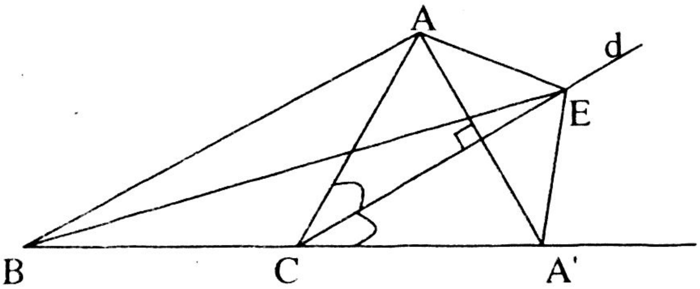
a) Chứng minh AF = CE.

b) Gọi trung điểm của AF là M, trung điểm của CE là N. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

ĐỀ 1

Bài 1.



Lấy A' đối xứng với A qua d.

$EA + EB = EA' + EB$

$CA + CB = BA'$

Xét $\Delta EBA'$ ta có:

$EA' + EB > BA' = BC + CA$

$\Leftrightarrow EA + EB > BC + CA$ (đpcm)

Bài 2.

a) Gọi G là trọng tâm ΔABC nên: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Gọi M là trọng tâm tứ giác ABCD nên: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{GD}$ (1)

Điều này chứng tỏ G, M, D thẳng hàng.

b) Xét: $V_G^{1/4} : D \to M$

Vậy $D \in d \to M \in d' = V_G^{1/4}(d)$.

Bài 3.

Gọi mặt phẳng (α) đi qua M song song SA và song song BC nên

MN//SA (1)

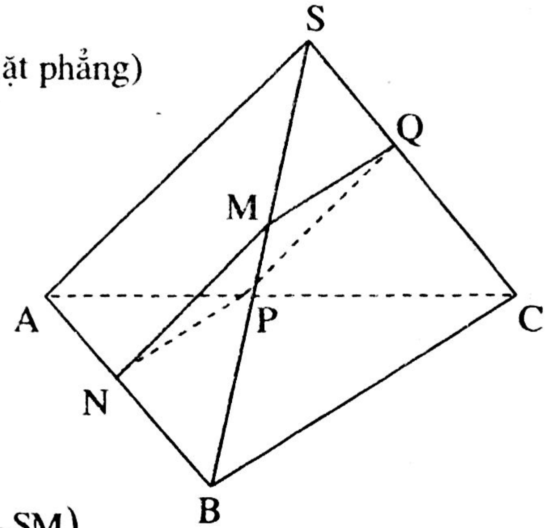
MQ//BC (2)

(Theo tính chất đường thẳng song song mặt phẳng)

Tương tự:

QP//SA (3)

NP//BC (4)



Từ (2) và (4) $\Rightarrow$ MQ//NP, QP//MN

$\Rightarrow$ MNPQ hình bình hành.

Thiết diện hình thoi khi MN = MQ.

Theo định lý Talét:

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{SM}{SB} \Rightarrow MQ = \frac{SM.BC}{SB}$$

$$\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{SB} \Rightarrow MN = \frac{SA.BM}{SB} = \frac{SA(SB - SM)}{SB}$$

$$\Leftrightarrow SM.BC = SA(SB - SM) \Leftrightarrow SM = \frac{SA.SB}{BC + SA}.$$

ĐỀ 2.

Bài 1.

Gọi:

$Đ_{O_1}$: đối xứng tâm O_1.

$Đ_{O_2}$: đối xứng tâm O_2.

$Đ_{O_1}$: $M \to M'$ thoả mãn $\overrightarrow{O_1M} = -\overrightarrow{O_1M'}$.

$Đ_{O_2}$: $M' \to M''$ thoả mãn $\overrightarrow{O_2M'} = -\overrightarrow{O_2M''}$.

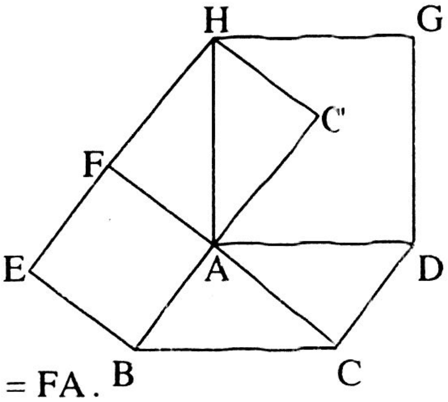
Vậy $\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1M'} = -\overrightarrow{O_2M''} = -\overrightarrow{O_2O_1} - \overrightarrow{O_1M''}$.

$2\overrightarrow{O_2O_1} = -\overrightarrow{O_1M'} - \overrightarrow{O_1M''} = \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1M''} = \overrightarrow{M''M}$.

Hay: $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$ (*)

Đẳng thức (*) chứng tỏ $M'' = T_{2O_1O_2}M$.

Hay $Đ_{O_2}.Đ_{O_1} = 2T_{2O_1O_2}(M) \to M''$.



Bài 2.

Thực hiện phép quay

$Q_A^{90^0} : D \to H$

$C \to C'$

$AC' = AC$

$AH = AD \Rightarrow HC' \perp DC$ (Vì $DC \to HC'$)

$\Rightarrow HC' \perp AB \Rightarrow HC' // FA$ và $HC' = CD = AB = FA$.

Vậy AFHC' là hình bình hành nên $FH = AC' = AC$.

Bài 3.

a) Gọi H là trọng tâm ΔABC có $AM = 3a$ và là đường cao

$\Rightarrow AB = \dfrac{AM}{\sin 60^0} = 3a$.

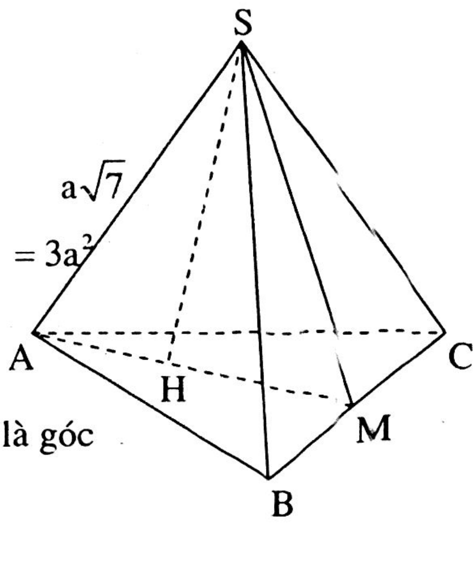
$AB = 2a\sqrt{3}$.

b) Ta thấy H là trọng tâm và chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC)

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 7a^2 - \left(3a.\frac{2}{3}\right)^2 = 7a^2 - 4a^2 = 3a^2$$

$\Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) là góc AMH (theo định lý 3 đường vuông góc).



$\tan\widehat{AMH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AMH} = 60^0$

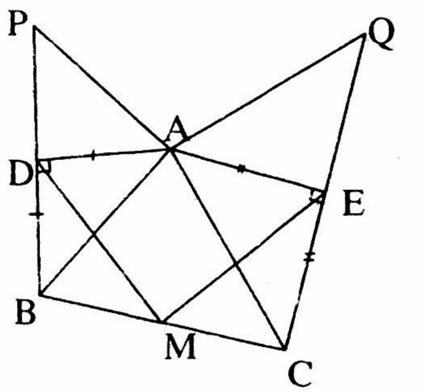
Góc giữa cạnh SA với mặt (ABC) là góc SAH

$$\tan\widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{3a\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy góc giữa cạnh SA với đáy φ có $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: do SABC t là chóp am giác đều nên góc giữa các mặt bên và đáy đều bằng nhau nên các góc đều bằng 60^0 . Cạnh bên và đáy bằng nhau nên các góc đều bằng φ.

ĐỀ 3



Bài 1.

Lấy P đối xứng B qua D; Q đối xứng C qua E.

Ta thấy ΔBAP vuông cân; ΔCAQ vuông cân.

$Q_A^{90^0} : P \to B$

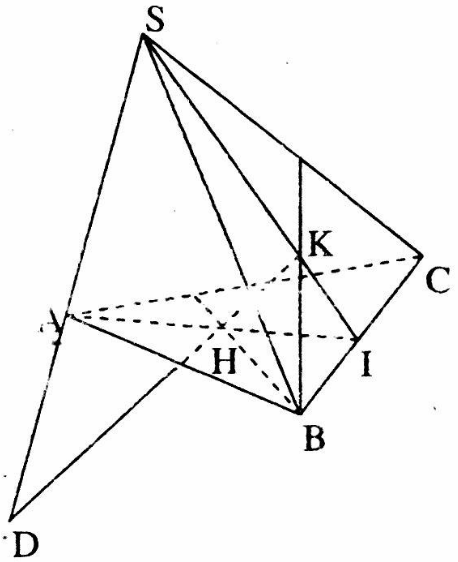
$C \to Q$

$\Rightarrow PC = BQ; PC \perp BQ$

Nên $PC \perp BQ$, xét các tam giác ΔPBC và ΔBCQ

$\Rightarrow DM // PC; ME // BQ \Leftrightarrow DM \perp ME \Rightarrow \Delta DME$ vuông.

Bài 2.



a) $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAI) \perp (ABC)$

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$ và $BC \in (SBC)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$ (đpcm).

b) $HK \in (SAI) \Rightarrow HK \perp BC$ (1)

Mặt khác: $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$

$\Rightarrow \begin{cases} BH \perp SC \\ BK \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow HK \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK \perp (SBC)$

c) Tứ diện SBCD có các cạnh đối vuông góc với nhau.

$SA \perp BC$ (1)

$DK \perp (SBC)$ và K trực tâm

Theo câu b) $SC \perp (BKH) \Rightarrow SC \perp DB$ (2)

Vì $DB \in (BKH)$

Tương tự $SB \perp (CKH) \Rightarrow SB \perp DC$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ tứ diện SDBC có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

Bài 3.

Gọi thiết diện là mặt phẳng α thì

Thiết diện $\alpha // AC \Rightarrow (\alpha) \times AA' = M; (\alpha) \times CC' = N$

$\Rightarrow MN // AC$ và $MN // A'C'$.

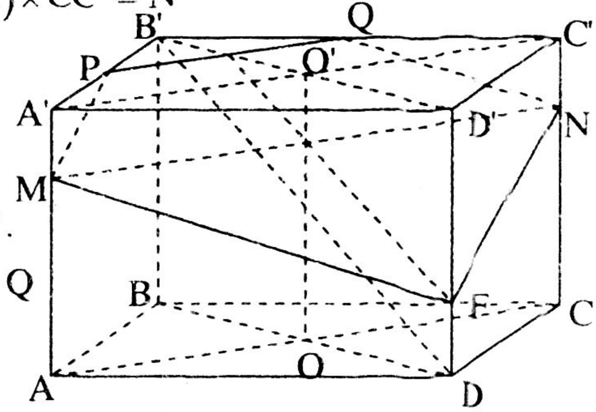
và mặt $(\alpha) \times BB'D'D = d$

$d // B'D' \Rightarrow d \times B'D' = E; d \times DD' = F$

Vậy mặt $(\alpha) \times (A'B'C'D') = m // A'C'$.

m đi qua E và $m \times AA' = P; m \times B'C' = Q$

Vậy thiết diện là ngũ giác MFNQP.



ĐỀ 4

Bài 1.

a) Giả sử ABCD dựng được thoả mãn điều kiện bài toán $AB \in PQ$.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI \perp PQ \Rightarrow$ I là trung điểm PQ.

Xét hình vuông PQMN đồng dạng hình vuông ABCD

Xét $V_I^{PQ/AB} : M \to C$

$\Rightarrow C \in (O); C \in IM \Rightarrow$ D tương tự.

b) Dựng hình PQMN vuông cạnh PQ

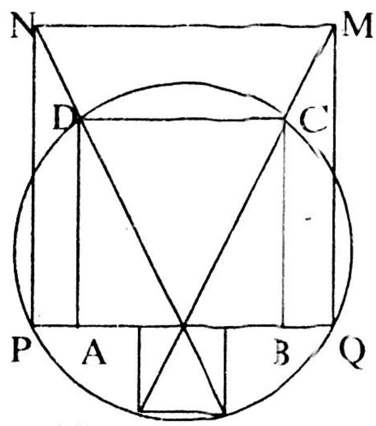
Nối M với I cắt đường tròn tại C $\to$ B

Nối N với I cắt đường tròn tại D $\to$ A

ABCD cần dựng.

c) Chứng minh ABCD là hình vuông

Thật vậy:



$$DC // MN \Rightarrow \frac{DA}{PN} = \frac{IA}{IP} \Rightarrow \frac{DA}{PA} = \frac{2IA}{2IP} = \frac{AB}{PQ} \Rightarrow DA = AB$$

$\Rightarrow$ ABCD hình vuông.

Biện luận: bài toán có hai nghiệm.

Bài 2.

a) Xét mặt (MAI) ta có $BC \perp (MAI) \Rightarrow OH \perp BC$

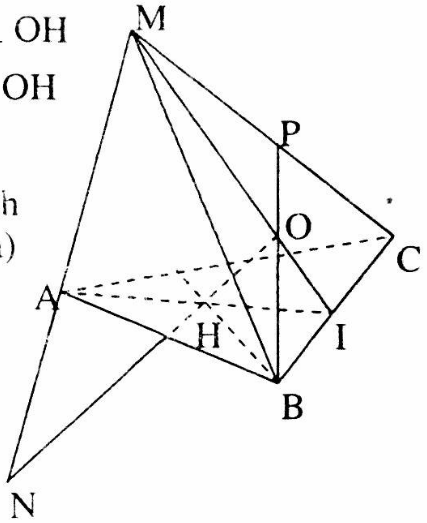
Xét mặt: $(MAC) \Rightarrow NB \perp (MAC) \Rightarrow NB \perp MC$

Xét mặt: (NBP) có $MC \perp BP$ (1)

$NB \perp MC$ (2)

Vậy: $MC \perp (NPB) \Rightarrow MC \perp (HOB) \Rightarrow \begin{cases} MC \perp OH \\ BC \perp OH \end{cases}$

$\Rightarrow (MBC) \perp OH$ (đpcm)



b) Chứng minh MNBC là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau. Chứng minh tương tự câu a)

Bài 3.

a) $SA = a\sqrt{3}$; $AB = AC = a\sqrt{7}$; $BC = 4a$

Dựng thiết diện vuông góc AH

Lấy $K \in AH$, qua K dựng $MN \perp AH$

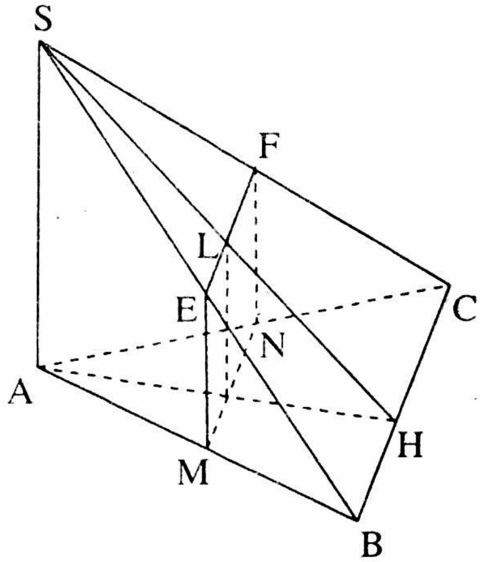
tức $MN // BC, (M \in AB; N \in AC)$;

Trong mặt phẳng (SAH) dựng $KL // SA$, $L \in SH$

Vậy $KI \perp (ABC)$ và vuông góc $AH \Rightarrow (MKL) \perp AH$

Vậy (MKL) cắt mặt (SBC) có giao tuyến:

$EF // BC$, $E \in SB$, $F \in SC$.



Vậy thiết diện MNEF,

Thiết diện đó có: $LK // SA \Rightarrow LK // EM // FN$

MNEF là hình bình hành

$\Rightarrow$ thiết diện là hình chữ nhật vì $EM \perp MN$

b) Gọi khoảng cách từ A đến mặt phẳng là x

$\Rightarrow AK = x$.

Tính diện tích MNFE; $S_{MNFE} = MN.EM$

Tính EM: $\dfrac{EM}{SA} = \dfrac{KH}{AH} = \dfrac{AH - x}{AH} = \dfrac{EM}{A\sqrt{3}}$

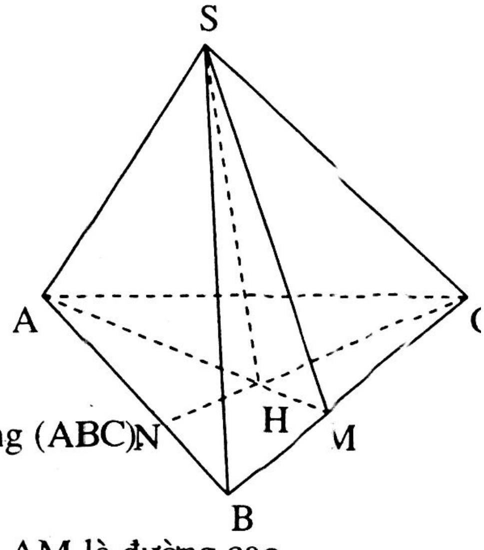
$AH^2 = AC^2 - HC^2 = 7a^2 - 4a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow AH = a\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}} = \dfrac{EM}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow EM = a\sqrt{3} - x$

Tính MN: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{x}{AH} = \dfrac{MN}{4A} = \dfrac{x}{a\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \dfrac{4x\sqrt{3}}{3}$.

Vậy: $S_{MNFE} = \dfrac{4x\sqrt{3}}{3}\left(a\sqrt{3} - x\right)$.

ĐỀ 5.



Bài 1.

a) $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC \quad (1)$

$\begin{cases} SB \perp SA \\ SB \perp SC \end{cases} \Rightarrow SB \perp (SAC) \Rightarrow SB \perp AC \quad (2)$

Tương tự: $SC \perp AB$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống (ABC)

Nối: $AH \times BC = M$

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM$ là đường cao.

Tương tự CN là đường cao $\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔABC

Xét tam giác ASM vuông ở S.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SM^2} \quad (1)$

Xét tam giác BSC vuông ở S ta có: $\dfrac{1}{SM^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có: $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$ (đpcm)

Bài 2.

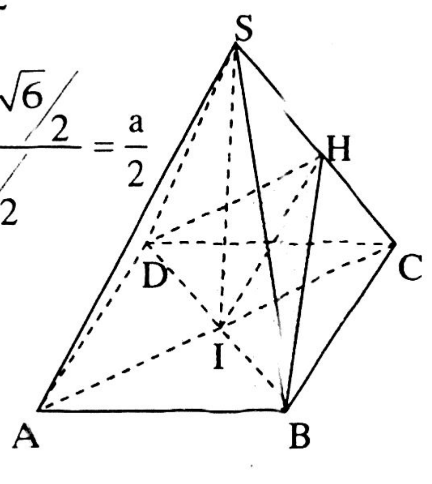
ABCD là hình thoi: $\Rightarrow \left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $IH \perp SC \Rightarrow SC \perp (DHB)$, góc phẳng (SCD) và **(SBC) là góc** DHB.

Tính góc DHB; $BD = a \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = \frac{6a^2}{4} + 3a^2 = \frac{9a^2}{2} \Rightarrow SC = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

Xét hai tam giác vuông IHC và SAC ta có:



$$\frac{IH}{SA} = \frac{IC}{SC} \Leftrightarrow \frac{IH}{a\sqrt{6}/2} = \frac{a\sqrt{3}/2}{3a\sqrt{2}/2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}/2 \cdot a\sqrt{6}/2}{3a\sqrt{2}/2} = \frac{a}{2}$$

Vậy Δ DHB có $IH = \dfrac{1}{2}DB \Rightarrow \Delta DHB$ vuông ở H.

Vậy góc giữa hai mặt (SDC) và (SBC) vuông **góc với nhau.**

Bài 3.

$Q_B^{60^0}: C \to F$

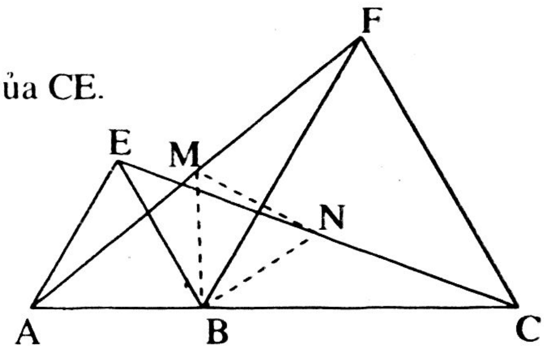
$E \to A$

$\Rightarrow CE \to FA \Rightarrow CE = FA.$

và M trung điểm của AF, N là trung điểm của CE.

$\Rightarrow Q_B^{60^0}: N \to M \Rightarrow \begin{cases} BN = BM \\ \left(BN, BM\right) = 60^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BMN$ là tam giác đều.



MỤC LỤC